

BOSONENARTIGE BINDUNGSZUSTÄNDE
DER SPINORFELDTHEORIE
IM GITTERRAUM

Dietrich Stocker

—
1972
—

Bosonenartige Bindungszustände der Spinorfeldtheorie
im Gitterraum

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dietrich Stocker

München
1971



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

2. Berichterstatter: Dr. F. Wahl

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Februar 1972

Zusammenfassung:

Die Berechnung von Teilchen-Antiteilchen-Bindungszuständen wurde mit Hilfe störungstheoretischer Methoden unternommen. Ketten- und Leitergraphen lassen sich vermöge der Fierz-Invarianz geschlossen aufsummieren und ergeben eine Polstruktur der Streuamplitude, die auf gebundene Zustände zu schließen gestattet. Die Rechnungen wurden zunächst mit einem lorentzinvarianten cut-off durchgeführt und diskutiert. Die gewonnenen Ergebnisse, so zeigt es sich, gelten auch, mit geringer Modifikation der eingehenden Konstanten, in der Gitterraumtheorie. Die Größe der Vierfermionen-Kopplung bestimmt die Massen der Bosonen, die aber nur im physikalischen Bereich liegen, wenn die Kopplungskonstante W proportional $\sqrt{Z}$ genommen wird, wo Z^3 die Anzahl der Gitterpunkte des Raumes ist. Die Boson-Fermion-Kopplung ist im wesentlichen unabhängig von der Lage des Pols und geht umgekehrt proportional zu $\ln Z$. Ein zweites Resultat der strengen Gitterraum-Rechnungen besteht in der expliziten Verletzung der Lorentz-Kovarianz der Vakuumpolarisation, welche die kubische Struktur dieses nichtrelativistischen Raum-Modells spiegelt. Zum Zweck einer Verbesserung der Massenwerte wurde die N/D-Methode auf die Teilchen-Antiteilchen-Streuamplitude angewandt und die Integralgleichungen für die Bindungszustände aufgestellt.

Inhalt

<u>Einleitung</u>	4
1. <u>Bindungszustände einer lokalen Vierfermion-Theorie in der Kettennäherung der Teilchen-Antiteilchen-Streuung</u>	8
1.1 Normalordnung des Hamiltonoperators	10
1.2 Spektraldarstellung des Bose-Propagators relativistisch und nichtrelativistisch	15
1.3 Theorie von Lurié und MacFarlane	18
1.4 Anwendung auf die Gitterraumwechselwirkung	21
2. <u>Explizite Durchführung mit Hilfe einer lorentz-invarianten Abschneidung</u>	24
2.1 Direkte Berechnung der Vakuumpolarisation für kleine Impulse	24
2.2 Beliebige Impulse: Anwendung der Dispersionsrelationen	27
2.3 Die Lage der Bindungszustände in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante	31
2.4 Stärke der Boson-Fermion-Kopplung in Abhängigkeit vom cutoff	33
2.5 Eine Wechselwirkung, die gleichzeitig pseudo-skalare und vektorielle Teilchen enthält	36
2.6 Behandlung des Teilchen-Teilchen-Kanals	37
3. <u>Integration der Vakuumpolarisation im Gitterraum</u>	42
3.1 Direkte Berechnung im Fall kleiner Impulse	42
3.2 Die Diskontinuität für $q=0$	47
3.3 Diskussion für $q=0$	54

4. <u>Über höhere Näherungen zur Massenbestimmung</u>	61
4.1 Die Partialwellenentwicklung	63
4.2 Die Unitaritätsgleichungen	66
4.3 Die N/D-Gleichungen	71
4.4 Projektion der Partialwellen aus der Ketten- näherung	72
4.5 Diskussion der N/D-Methode	78
<u>Anhang I:</u> Normalordnung des Hamiltonoperators	83
<u>Anhang II:</u> Berechnung der Teilintegrale des Vakuum- polarisationsgraphen	85
<u>Anhang III:</u> Die Gitterraumintegrale	90
<u>Anhang IV:</u> Berechnung der Helizitäts-Amplituden	93
<u>Anhang V:</u> Transformation der Wechselwirkung auf Normaldarstellung	98
<u>Literaturverzeichnis</u>	100

Einleitung

Die Konstruktion einer Quantenfeldtheorie kann man mit der Definition des Hilbertraumes beginnen, der dieser Theorie zugrunde gelegt werden soll. Er ist in der Regel ein Fockraum. Das hat seinen Grund darin, daß in einem Fockraum das physikalische Geschehen auf die einfachsten Prozesse zurückgeführt wird: Erzeugung und Vernichtung von Zuständen. Als Träger dieses Geschehens fassen wir die Punkte des Raumes auf - sie mögen verschiedene Zustände annehmen, etwa besetzt mit einem Teilchen oder unbesetzt [1]. Läßt man als die Menge der physikalischen Raumpunkte den R^3 zu, so gerät die Theorie in beträchtliche mathematische Schwierigkeiten und man mag sich fragen, ob nicht eine diskrete, endliche Menge ausreicht, um darüber einen Hilbertraum endlicher Dimension aufzubauen. Dies gäbe einen sicheren mathematischen Boden. Solche diskreten, endlichen Systeme kennen wir in der Festkörperphysik. Es liegt nahe, den Raum als ein endliches Gitter zu betrachten, und zwar, um eine genügend hohe Symmetrie zu erreichen, mit kubischer Struktur. Dieser Gitterraum sei ein würfelförmiger Kristall mit der Gitterkonstanten a und der Kantenlänge aZ , dabei bestehen die Beziehung $a = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ und l habe die Größenordnung einer nuklearen Länge. In der Grenze sollte Z gegen Unendlich gehen, so daß ein Übergang zur Kontinuums-Theorie gegeben ist. Wir wollen hier aber Z stets endlich halten. Der Preis, den man für die Beschränkung auf ein Festkörpermodell des Raumes zahlt, besteht zumindest im Verzicht auf die manifeste Kovarianz der Feldtheorie.

Trotzdem erscheint es nicht abwegig, auf diese Weise zu kovarianten Resultaten zu kommen, wenigstens in der Grenze eines sehr großen Raum-Volumens und verschwindender Gitterkonstante. F. Bopp [2] konnte nämlich zeigen, daß die kubische Gittersymmetrie ausreicht, eine Schrödingergleichung aufzustellen - wegen des diskreten Gitters eine Differenzengleichung -, welche genau der

Dirac-Gleichung entspricht und im Limes in sie übergeht. Diese Gleichung beschreibt ein freies Feld masseloser "Urfermionen" mit Viererspinoren, d.h. unser Hilbertraum ist für die Zustände eines Diracfeldes erklärt. Wenn man zusätzlich fordert, daß im Mittel alle Zustände negativer Energie besetzt sind, so kommt man zur bekannten Diracschen Löchertheorie der Teilchen und Antiteilchen. Dem Vakuum entspricht dann der Grundzustand dieses $2Z^3$ -Urfermionen-Systems.

Wir legen nun für unsere gesamte Theorie den Hilbertraum der Urfermionen zugrunde, indem wir annehmen, daß sich alle Teilchen aus den Urfermionen, welche Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind, zusammensetzen lassen. Um eine derartige einheitliche Feldtheorie zu vervollständigen, bedarf es noch einer Wechselwirkung zwischen den Urfermionen. Sie sollte nach dem Prinzip der maximalen Einfachkeit konstruiert werden unter der Forderung, daß die Fermionenzahl erhalten bleibe. Der einfachste derartige Wechselwirkungsoperator ist ein lokaler Vierfermionenoperator. F. Bopp [3] wählte für den Gitterraum den Heisenbergschen Operator [4] als Wechselwirkung, weil er optimal viele Symmetrien enthält. Unsere Theorie ist jetzt in ihrer Dynamik formal kovariant, wenngleich der Raum selbst als Träger der Dynamik nicht den räumlichen Teil einer Minowski-Welt bildet, da die Zeit kontinuierlich ist und das Gitter als fest betrachtet wird.

Variationsansätze [5] und Störungstheorie [6] zeigten, daß die Urfermionen in Hartree-Fockscher Näherung eine Masse bekommen. Diese $H_{\text{Hartree-Fock}}$ -Teilchen erfüllen ebenfalls eine Diracgleichung. Zwischen den positiven und den negativen Energien ist eine Lücke entstanden und die Erzeugung eines Teilchen-Antiteilchenpaares bedarf einer nichtverschwindenden Energie. Im weiteren ergaben sich zwei Wege, Näherungsverfahren anzuwenden. Erstens die gewöhnliche Störungsrechnung, wobei man die Feynman-Regeln leicht auf den Gitterraum übertragen kann [7]. Gewöhnlich ersetzt man zudem die Gittersummen durch

Integrationen. Zweitens die umgekehrte Störungsrechnung, welche vom Spektrum der Wechselwirkung ausgeht und den Bewegungsoperator als Störung auffaßt [8]. Diese Methode ist vor allem für starke Kopplungen geeignet. In der vorliegenden Arbeit wollen wir die gewöhnliche Störungstheorie anwenden, weil die Störungstheorie in der Feldtheorie schon sehr weit entwickelt und studiert wurde, sodaß die Ergebnisse unmittelbar mit den relativistischen Feldtheorien verglichen und in ihrem Wert beurteilt werden können.

Die zentrale Aufgabe der Gittertheorie besteht darin, das Teilchenspektrum zu finden, das sich durch den Einfluß der Wechselwirkung herausbildet. Uns soll in dieser Arbeit das Bosonenspektrum beschäftigen, das bei der Bindung von einem Teilchen mit einem Antiteilchen entsteht. H.J.W.Müller [9] hat bereits gezeigt, daß solche Bindungszustände möglich sind und sie sollen jetzt berechnet und diskutiert werden. Gleichzeitig bedeutet die Berechnung von gebundenen Zuständen, falls ihre Massen niedrig liegen, die Bestimmung des weitreichenden Anteils der Wechselwirkung, sodaß man eine Aussage über die Struktur der im Gitterraum wirkenden Kräfte bekommt. Es steht zu hoffen, daß das erhaltene Spektrum charakteristische Ähnlichkeit mit dem real existierenden Massenspektrum aufweist.

Die Gitterraumtheorie läßt sich als eine Feldtheorie mit Abschneidung auffassen, sodaß wir uns fragen müssen, ob und wie die physikalisch meßbaren Ergebnisse vom cutoff abhängen, was im Gitterraum die Abhängigkeit von Z bedeutet. Für die Hartree-Fock-Masse konnte die Kopplungskonstante so eingerichtet werden, daß der Massenwert auch im Limes konstant und endlich blieb. Es gilt also zu untersuchen, ob jene Anpassung der Kopplungskonstante sich auch weiterhin durchführen läßt und die Massen und Streuquerschnitte in der Grenze keine Funktionen von Z sind. Es ist außerdem interessant, andere, besonders lorentzinvariante cutoff-Theorien zum Vergleich

heranzuziehen, um daran die Eigenart des Gitterraums besser studieren zu können.

Das dritte Problem, das wir uns stellen, ist entscheidend für die Gitterraumtheorie. Da sie eine nicht-relativistische Theorie ist, muß immer geprüft werden, ob die Lorentzinvarianz der Ergebnisse tatsächlich erfüllt wird. Sobald es sich aber herausstellt, daß die physikalischen Größen die Kovarianz verletzen und diese Verletzung auch im Limes $Z \rightarrow \infty$ nicht unterhalb der Meßgenauigkeit liegt, so eignet sich die Gitterraumtheorie in einem wesentlichen Punkt nicht zur Beschreibung der Elementarteilchen, wiewohl sie als Modell durchaus wichtige Einsichten in die Natur einer Feldtheorie zu geben vermag [10].

Die Arbeit bringt in ihrem ersten Teil die allgemeine Theorie der gebundenen Zustände und entwickelt das Näherungsverfahren, mit dessen Hilfe wir die Massen bestimmen wollen. Die zentrale Rolle wird dabei die Berechnung des Vakuumpolarisations-Diagramms spielen. Der zweite Teil ist der Ausführung der Rechnungen mit einer lorentzinvarianten Abschneidung gewidmet. Die Ergebnisse, welche anschließend diskutiert werden, gelten ebenso für die strenge Gitterraumtheorie. Die Auswertung der Gitterraum-Integrale bildet den dritten Teil der Arbeit. Neben der Übertragung der Resultate des vorangegangenen Kapitels bildet die Untersuchung der Kovarianz der Funktionen das Ziel dieses Abschnittes. Schließlich wollen wir im vierten Teil Methoden zur Verbesserung der Massenberechnung betrachten. Weitere Approximationen erscheinen wichtig, weil wir noch nicht wissen, ob wir mit der hier durchgeführten Näherung bereits die wahren Verhältnisse erfaßt haben und weil wir die Güte der Ergebnisse allenfalls an höheren Näherungen beurteilen können.

1. Bindungszustände einer lokalen Vierfermion-Theorie in der Kettennäherung der Teilchen-Antiteilchen-Streuung

Die Lage der Gitterpunkte beschreiben wir durch den Gittervektor $\underline{n}$, der als Tripel ganzer Zahlen gegeben ist. Die Vektoren eines Gitterpunkts zu seinen nächsten Nachbarn bezeichnen wir mit $\underline{e}_i$. Damit lautet der Hamiltonoperator für das freie masselose Urfermionen-Feld $\psi(\underline{n})$ [2]

$$(1.1) \quad H_B^0 = \sum_{\underline{n}} \psi^\dagger(\underline{n}) \left\{ -\frac{i}{2a} \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\psi(\underline{n} + \underline{e}_i) - \psi(\underline{n} - \underline{e}_i)) \right\}.$$

Zwischen den Feldoperatoren stehen die Diracmatrizen* $\alpha_i = \gamma_0 \gamma_i$ ($i=1,2,3$). Die daraus folgende Schrödingergleichung ist die Gitterraumdarstellung der Feldgleichung des Dirac-Felds. Als Wechselwirkung wurde die Vierfermionenkopplung

$$(1.2) \quad H_W^0 = -W \sum_{\underline{n}} \bar{\psi}(\underline{n}) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(\underline{n}) \bar{\psi}(\underline{n}) \gamma_5 \gamma^\mu \psi(\underline{n})$$

eingeführt, die der Heisenbergtheorie entspricht.

Wegen der Feinheit des Gitters nehmen wir an, daß wir nichts Wesentliches verlieren, wenn wir die Summen über das Gitter in Integrale über die Ortsraumvariable $\underline{x}$ verwandeln. Dies geschieht mit den Formeln [7]

$$(1.3) \quad \sum_{\underline{n}} \xrightarrow[\substack{1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}}]{1/\sqrt{2}} \frac{1}{a^3} \int d^3x, \quad \psi(\underline{n}) \rightarrow a^{3/2} \psi(\underline{x}), \quad g := -Wa^3 \quad \begin{matrix} x = na \\ a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$$

so daß die Operatoren H_B^0 und H_W^0 unter Verwendung der Taylor-Entwicklung formal die Gestalt

$$(1.4) \quad \begin{aligned} H_B^0 &= \int d^3x (-i) \psi^\dagger(\underline{x}) \underline{\alpha} \cdot \tilde{\nabla} \psi(\underline{x}) \\ \tilde{\nabla}_i &:= \sinh(a \frac{\partial}{\partial x_i}) \quad i=1,2,3 \end{aligned}$$

$$H_W^0 = g \int d^3x \bar{\psi}(\underline{x}) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(\underline{x}) \bar{\psi}(\underline{x}) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(\underline{x})$$

bekommen. Der Operator $\tilde{\nabla}$ unterscheidet sich vom gewöhnlichen Nabla-Operator um weniger als $\epsilon > 0$, wenn man die Feldoperatoren $\psi(\underline{x})$ mit Testfunktionen verschmiert, deren

*Wir verwenden Metrik und Matrixkonventionen wie bei Bjorken-Drell [12]

n-te Ableitungen ($n \geq 2$) gleichmäßig durch $\text{const} \cdot \frac{\varepsilon}{2} a^{1-n} |f|$ beschränkt sind.

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi_f(x) = \int d^3x \, \psi(y) f(x-y) \\ \frac{1}{a} \sinh a \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_f(x) &= \frac{1}{a} \int d^3x \, \psi(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_i^{2n+1}} f(x-y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_f(x) + R \end{aligned}$$

Der Rest R läßt sich abschätzen (vgl. [41] Kap. I)

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{1}{a} \left\| \int d^3x \, \psi(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_i^{2n+1}} f(x-y) \right\| \\ &\leq \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} a^{-2n} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \text{const} \cdot \left\| \int d^3x \, \psi(y) |f(x-y)| \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sinh 1 < \varepsilon, \quad (a \ll 1), \end{aligned}$$

wenn wir die Konstante so wählen, daß sie kleiner ist als $\|\psi_f\|^{-1}$. Das bedeutet, daß für alle Größen, deren Abhängigkeit vom Ort hinreichend glatt ist, $\tilde{\nabla}$ durch ∇ ersetzt werden kann.

Unsere Rechnungen werden wir einfacher im Impulsraum durchführen, in den die Fouriertransformierte des Bewegungsoperators

$$\begin{aligned} H_B^0 &= \sum_{\underline{h}} \sum_{i=1}^3 \psi^+(\underline{h}) \alpha_i \cdot \frac{1}{a} \sin\left(\frac{2\pi}{2} \underline{h}_i\right) \psi(\underline{h}) \\ (1.5) \quad \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}^3} \sum_{\underline{h}} \psi(\underline{h}) e^{\frac{2\pi i}{2} \underline{h} \cdot \underline{x}} \end{aligned}$$

aus einer Summe über die Vektoren $\underline{h}$ aus der ersten Brillouin-Zone besteht. Die Größen

$$(1.6) \quad p_i = \frac{\sqrt{2}}{\ell} \sin\left(\frac{2\pi}{2} \underline{h}_i\right) \quad i = 1, 2, 3$$

welche den Impulsen der Dirac-Gleichung entsprechen, sind jedoch in der Gitterraumtheorie nicht mehr gleich den kanonischen Impulsen $2\pi \underline{h} / \ell \sqrt{2}$. Im Impulsraum werden wir gleicherweise die Summen durch Integrale ersetzen. Der Integrationsbereich bleibt aber der endliche Kubus,

so daß im folgenden alle Integrale über lokal summierbare Funktionen existieren.

1.1 Normalordnung des Hamiltonoperators

In der Quantenfeldtheorie verwendet man üblicherweise normalgeordnete Operatoren, denn damit ist von vornherein garantiert, daß die Vakuumerwartungswerte von Observablen verschwinden. Wir gehen auch in unserem Gitterraumproblem zur normalgeordneten Darstellung über. Die Lagrangedichte*

$$(1.7) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(x) i \tilde{\not{\partial}} \psi(x) - g \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$$

teilen wir - um positive und negative Energien eindeutig zu trennen - in eine ungestörte Lagrangedichte $\mathcal{L}_B$ und einen Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_W$ auf

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \bar{\psi}(x) i \tilde{\not{\partial}} \psi(x) - \bar{\psi}(x) m_0 \psi(x) \\ \mathcal{L}_W &= -g \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi}(x) m_0 \psi(x) \end{aligned}$$

Die Masse m_0 sei jetzt noch beliebig. Der zugehörige Diracsee freier Teilchen hat eine Energielücke von $2m_0$ zwischen Zuständen positiver und negativer Energie. Wir teilen also die Feldoperatoren in Anteile positiver und negativer Energie auf

$$(1.9) \quad \psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x).$$

Das ergibt vier Operatoren, die wir durch ihre Impulsraum-Entwicklung darstellen [11], [12]:

$$(1.10a) \quad \psi^{(+)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0}{E}} b(q,s) u(p,s) e^{-iq \cdot x}$$

vernichtet ein Teilchen

$$(1.10b) \quad \psi^{(-)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0}{E}} d^+(q,s) v(p,s) e^{iq \cdot x}$$

erzeugt ein Antiteilchen

*Wir gehen hier zur Viererschreibweise über, da $\mathcal{L}$ formal kovariant ist, obwohl $\tilde{\partial}$ kein Vierervektor ist und die Raumstruktur auch beim Übergang (1.3) nichtrelativistisch bleibt.

$$(1.10c) \quad \bar{\psi}^{(+)}(x) = \bar{\psi}^{(+)} = \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0}{E}} b^\dagger(q,s) \bar{u}(p,s) e^{iq \cdot x}$$

erzeugt ein Teilchen

$$(1.10d) \quad \bar{\psi}^{(+)}(x) = \bar{\psi}^{(-)} = \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0}{E}} d(q,s) \bar{v}(p,s) e^{-iq \cdot x}$$

vernichtet ein Antiteilchen *

$$(1.10e) \quad q_0 = E = p_0 = + \sqrt{p^2 + m_0^2}, \quad q_i = \frac{2\pi\hbar_i}{\ell\sqrt{2}} \quad i=1,2,3$$

vgl. (1.6)

Die Spinoren $u(p,s)$ ^{$v(p,s)$} sind Lösungen der Gleichung [12]

$$(\not{p} - m) u = 0, \quad (\not{p} + m) v = 0$$

mit dem p_i aus (1.6) und der Energie p_0 aus (1.10e)

$\psi^{(-)}$ und $\bar{\psi}^{(-)}$ sind Erzeugungsoperatoren, $\psi^{(+)}$ und $\bar{\psi}^{(+)}$ Vernichtungsoperatoren. Wir müssen also die Operatoren negativer Energie links von den Operatoren positiver Energie anordnen, dann verschwindet der Erwartungswert des dergestalt normalgeordneten Wechselwirkungsterms bezüglich des Diracsees. Zur Berechnung der Kommutatoren benutzt man die Vertauschungsrelationen der b - und d - Operatoren

$$(1.11) \quad \{b^\dagger(q,s), b(q',s')\} = \{d(q,s), d^\dagger(q',s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(q-q')$$

(alle anderen Antikommutatoren verschwinden) und den Umstand, daß die $u(p,s)$ und $v(p,s)$ ein vollständiges ortho-normiertes System von Lösungen zur positiven bzw. zur negativen Energie darstellen. Es gilt daher [12]

$$(1.12) \quad \sum_s \bar{u}_\alpha(p,s) u_\beta(p,s) = \left(\frac{\not{p} + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\alpha}$$

$$\sum_s \bar{v}_\alpha(p,s) v_\beta(p,s) = \left(\frac{\not{p} - m_0}{2m_0} \right)_{\beta\alpha}$$

Auf der rechten Seite stehen die Projektionsoperatoren für positive bzw. negative Energie. Das ergibt für den

*Diese Teilchen-Antiteilchen-Struktur muß nicht bei eingeschalteter Wechselwirkung erhalten bleiben.

gleichen Raum-Zeit-Punkt die Antikommutatoren:

$$(1.13) \quad \left\{ \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(x) \right\} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\not{p} + m_0}{2E} \right)_{\beta\alpha}$$

$$\left\{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x), \psi_\beta^{(-)}(x) \right\} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\not{p} - m_0}{2E} \right)_{\beta\alpha}$$

(alle anderen Antikommutatoren verschwinden). Operatoren, welche zwei Feldoperatoren enthalten, unterscheiden sich von der normalgeordneten Form nur durch eine c-Zahl. Der Vierfermionenoperator unterscheidet sich außerdem durch einen Teilchenzahloperator. Die Umordnung im einzelnen ist einfach aber etwas umständlich und wird im Anhang I zusammengestellt. Das Ergebnis lautet

$$(1.14) \quad \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) :$$

$$- : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4m_0}{E} + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{4m_0^2 - 2p \cdot p'}{E E'}$$

Die auftretende Konstante läßt sich beseitigen, indem man den Energienullpunkt neu festlegt. Wenn man weiterhin fordert, daß L_W (1.8) keinen Teilchenzahloperator enthalten soll, so sieht man aus dem zweiten Term von (1.14), daß die Selbstkonsistenzbedingung [5,6]

$$(1.15) \quad 1 = -4g \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}, \quad g < 0$$

der Hartree-Fock-Näherung erfüllt werden muß. Mit (1.15) erhalten wir die normalgeordnete Lagrangedichte

$$(1.16) \quad \mathcal{L} = : \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - m_0) \psi(x) : - g : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) :$$

Für die Störungstheorie muß man beachten, daß in einem Graphen keine Faktoren  mehr auftreten.

Die Anwendbarkeit der Störungstheorie hängt davon ab, ob die Voraussetzungen für das Adiabatentheorem [13] erfüllt sind: 1) Der Hamiltonoperator hat ein diskretes Spektrum, was bei unserem endlichen Hilbertraum auf jeden Fall gilt. 2) Der ungestörte Grundzustand ist nicht

entartet. Da der Diracsee der Hartree-Fock-Fermionen ein eindeutiger* Zustand ist, der um die Energielücke $2m_0$ tiefer liegt als die übrigen Zustände, treffen die Voraussetzungen des Satzes zu. Für die Operatoren und Zustände im Wechselwirkungsbild ist seine Aussage: Wenn die Wechselwirkung im Intervall $-\infty < t < 0$ adiabatisch eingeschaltet wird, so gibt es eine unitäre Transformation, welche die Zustände der freien Theorie in die Zustände der wechselwirkenden Theorie überführt und diese Transformation ist durch die Störungsreihe gegeben. Insbesondere geht der Grundzustand in einen exakten Eigenzustand von H über. Ist die Kopplungskonstante klein: $g < m_0/(4\pi\hbar\mu)$ [41], so geht der Grundzustand in den wiederum nichtentarteten Grundzustand über. Wir wollen für das Folgende voraussetzen, daß dies auch dann noch gilt, wenn wir, um Bindungszustände zu finden, die Kopplungskonstante nicht so stark beschränken können.

Unser Vorgehen unterscheidet sich von der Störungsrechnung im LSZ-Formalismus. Während wir hier die Hartree-Fock-Zustände als ungestörtes System verwenden (vgl. (1.8)), dienen in der axiomatischen Feldtheorie die asymptotischen Felder als Ausgangspunkt der Störungsrechnung (vgl. zB [12]). Diese Zustände würden im Gitterraum den exakten $(2Z^3_{+1})$ -Teilchenzuständen der wechselwirkenden Theorie entsprechen. Da wir aber über die Transformationseigenschaften solcher Zustände bezüglich der Poincarégruppe in unserer Gitterraumtheorie keine Aussage haben und wir kaum erwarten dürfen, daß der Hilbertraum dieser asymptotischen Zustände vollständig ist**, können

*Die chirale Entartung des Gitterraums steckt in der Transformation auf die Hartree-Fockzustände: Es existiert eine einparametrische Schar unitärer Transformationen des Hilbertraums der Urfermionen auf einen Hartree-Fock-Hilbertraum. Haben wir aber eine feste Transformation gewählt, so ist der Grundzustand eindeutig.

**Im Gitterraum lassen sich asymptotische Bedingungen im Sinne von LSZ nicht gut formulieren, weil das endliche Gitter periodisch fortgesetzt wird. Bei sehr hohen Anregungen würde eine große Anzahl ein- und auslaufender Wellenpakete auftreten, die sich wegen des beschränkten

wir im Gitterraum die LSZ-Störungstheorie nicht übernehmen. Wir vermuten aber, daß eine Äquivalenz für den Fall besteht, daß nur geringe Teilchenzahlen mitspielen, also etwa in niedriger Ordnung der Störungsrechnung.

Raumvolumens nicht mehr räumlich trennen ließen, so daß sie immer untereinander in Wechselwirkung stünden.

1.2 Spektraldarstellung des Bose-Propagators relativistisch und nichtrelativistisch.

Wir nehmen an, im Gitterraum existiere ein skalares oder pseudoskalares Feld als Bindungszustand. Wir wollen, da wir uns für derartige Bindungszustände interessieren, die Lehmann-Darstellung für den nichtrelativistischen Fall untersuchen und feststellen, worin sie sich von der relativistischen Darstellung unterscheidet. Es wäre schön, wenn man auch über die analytische Struktur der S-Matrix Aussagen machen könnte, was aber durch beträchtliche mathematische Schwierigkeiten verhindert wird. Für die Zwecke der Arbeit dürfte aber die Lehmann-Darstellung genügen.

Der Feynman-Propagator ist definiert als

$$(1.17) \quad \Delta_F'(x-x', t-t') = -i \langle 0 | T(\varphi(x, t), \varphi(x', t')) | 0 \rangle.$$

Wir benützen die Translationsinvarianz und setzen voraus, daß der Grundzustand ein Eigenzustand zum Gesamtimpuls Null und der Energie Null ist. Wir wollen auch die Eindeutigkeit des Vakuums annehmen. Schieben wir ein vollständiges System von Energie- und Impuls-Eigenzuständen ein, so bekommen wir

$$(1.18) \quad \Delta_F' = -i \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 (e^{-i p_n \cdot (x-x')} \theta(t-t') + e^{i p_n \cdot (x-x')} \theta(t'-t)).$$

Wir fassen alle Übergangselemente mit gleichem Viererimpuls zu einer Spektralfunktion ρ zusammen

$$(1.19) \quad \rho(q_0, q) := (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2$$

und haben die Darstellung

$$(1.20) \quad \Delta_F' = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \, \rho(q_0, q) (e^{-iq \cdot (x-x')} \theta(t-t') + e^{iq \cdot (x-x')} \theta(t'-t)).$$

Wir gehen mittels einer Fouriertransformation in den Impulsraum

$$(1.21) \quad \Delta_T(p, p) = \int d^4x \, e^{ip \cdot (x-x')} \Delta_T(x-x').$$

Wegen der θ -Funktionen hat man bei der Zeitintegration Integrale von Null bis Unendlich. Wir führen einen konvergenzerzeugenden Faktor ein, um in $\Delta_T(p, p)$ eine eindeutige Vorschrift zu haben, wie um die Pole zu integrieren ist.

$$(1.22) \quad \int_0^\infty d\tau \, e^{i(p_0 - q_0)\tau} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty d\tau \, e^{i(p_0 - q_0 + i\epsilon)\tau} = \frac{-i}{p_0 - q_0 + i\epsilon}$$

Die Integrale über die Raumkomponenten ergeben δ -Funktionen. Somit ist

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \Delta_T'(p, p) &= \int d^3q \, \varrho(q, q) \left[\frac{1}{p_0 - q_0 + i\epsilon} \delta^3(q-p) - \frac{1}{p_0 + q_0 - i\epsilon} \delta^3(q+p) \right] \\ &= \int d^3q_0 \left[\frac{\varrho(q_0, p)}{q_0 - p_0 - i\epsilon} + \frac{\varrho(q_0, -p)}{q_0 + p_0 - i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

Wir fordern Invarianz unter Raumspiegelungen

$$(1.24) \quad \varrho(q_0, -p) = \varrho(q_0, p).$$

Da das Vakuum der Zustand niedrigster Energie ist, müssen alle Zwischenzustände die Energie $q_0 \geq 0$ haben (Spektrumsbedingung). Damit haben wir die Lehmann-Källén-Darstellung für den nichtrelativistischen Propagator

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \Delta_T'(p, p) &= - \int_0^\infty dq_0 \, \varrho(q_0, p) \left[\frac{1}{q_0 - p_0 - i\epsilon} + \frac{1}{q_0 + p_0 + i\epsilon} \right] \\ &= \int_0^\infty dq_0 \, \varrho(q_0, p) \frac{(-2q_0)}{q_0^2 - p_0^2 - i\epsilon} \end{aligned}$$

Besteht wie in der Festkörperphysik keine Teilchen-Loch-Symmetrie, so sind die beiden Terme im Integranden verschieden [17].

Für den Fall der vollen Lorentz-Invarianz können wir Δ_T' noch weiter umformen. Dazu müssen wir nachweisen,

daß die Dichtefunktion nur vom Quadrat des Viererimpulses abhängt. Sei $U(\Lambda)$ eine Lorentztransformation, so stellen wir fest, daß $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$ wegen der Lorentzinvarianz des Vakuums ist. Für ein skalares Feld gilt

$$U(\Lambda) \varphi(x) U^{-1}(\Lambda) = \varphi(x) \text{ und damit}$$

$$(1.26) \quad \rho(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | U(\Lambda) n \rangle|^2.$$

Die δ -Funktion ist lorentzinvariant

$$(1.27) \quad \delta^4(p_n - q) = \delta^4((p_n - q) \Lambda^{-1}).$$

Wir summieren jetzt über das vollständige System $|m\rangle = U(\Lambda)|n\rangle$ mit den Eigenwerten

$$(1.28) \quad p_m^\Lambda = \langle m | P^\Lambda | m \rangle = \langle n | U^{-1} P^\Lambda U | n \rangle = (p_n \Lambda^{-1})^\Lambda,$$

sodaß gilt

$$(1.29) \quad \rho(q) = (2\pi)^3 \sum_m \delta^4(p_m - q \Lambda^{-1}) |\langle 0 | \varphi(0) | m \rangle|^2 = \rho(q \Lambda^{-1}),$$

womit gezeigt wurde, daß ρ ein Lorentz-Skalar ist, der nur von q^2 abhängen kann. Setzen wir

$$(1.30) \quad \sigma^2 = q_0^2 - \mathbf{p}^2, \quad d\sigma^2 = 2q_0 dq_0$$

und gehen damit in (1.25) ein, so haben wir die bekannte relativistische Lehmann-Källén-Darstellung

$$(1.31) \quad \Delta_F(p^2) = \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{\rho(\sigma^2)}{p^2 - \sigma^2 + i\epsilon}$$

(1.25) gibt uns die Lehmann-Källén-Darstellung für skalare Teilchen unter der Voraussetzung, daß der Grundzustand invariant in Bezug auf Translationen und Raumspiegelungen ist. Kennen wir die Dichtefunktion ρ , so lassen sich an ihr leicht die Abweichungen von der Lorentz-Invarianz studieren.

1.3 Theorie von Lurié und MacFarlane.

Gebundene Zustände von Teilchen und Antiteilchen treten als Pole der S-Matrix der Teilchen-Antiteilchen-Streuung auf. Wir wollen eine Näherung für die Streuamplitude betrachten, die eine Polstruktur ergibt und dabei der Darstellung von Lurié und MacFarlane [16] folgen. Nehmen wir an, wir haben eine Vierfermionentheorie mit γ_5 -Kopplung

$$(1.32) \quad \mathcal{L}_v = -g_v \bar{\psi} \gamma_5 \psi \bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

und berechnen die S-Matrix näherungsweise durch Aufsummation der Kettengraphen. Dabei werde jeder Vertex γ_5 durch einen Punkt dargestellt.

$$(1.33) \quad S_{fi} \equiv \text{diagram with shaded circle} = \text{diagram with cross} + \text{diagram with circle} + \text{diagram with two circles} + \dots$$

Die Vakuumpolarisations-Schleife

$$(1.34) \quad \xrightarrow{q=2k} \text{diagram with loop and vertices} = 2g_v \Pi(q^2)$$

ist aus der Elektrodynamik bekannt und gibt nach den Feynmanregeln [7]*

$$(1.35) \quad 2g_v \Pi(q^2) = -2ig_v \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4(m^2 + k^2 - p^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}$$

wobei wir immer $q=2k$ setzen um Faktoren 2 zu vermeiden. Summiert man die Reihe auf**, erhält man für das invariante Streumatrixelement $\mathcal{M}_v$

* Solche Integrale divergieren und wir verwenden, um unsere Integrale zu definieren, eine Impulsabschneidung, die durch den Cutoff-Parameter charakterisiert ist. wird als eine große Zahl betrachtet, im Gitterraum ist $\Lambda = \sqrt{\frac{E}{2t}}$ (3.1).

** Wir betrachten $\mathcal{M}_v$ als analytische Funktion in der Kopplungskonstanten, so daß die geometrische Reihe über den Konvergenzkreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann.

$$(1.36) \quad \pi_\nu = \frac{-2ig_\nu}{1 - 2g_\nu \Pi(q^2)}$$

bis auf Spinorfaktoren. Angenommen, es gibt einen Bindungszustand bei $q^2 = \mu^2$, also eine Polstelle in π_ν , so muß

$$(1.37) \quad 1 - 2g_\nu \Pi(q^2) \Big|_{q^2=\mu^2} = 0$$

sein. Wir entwickeln $\Pi(q^2)$ um diese Stelle

$$(1.38) \quad \Pi(q^2) = \Pi(\mu^2) + \Pi'(\mu^2)(q^2 - \mu^2) + \dots$$

und setzen in (1.36) ein, so haben wir

$$(1.39) \quad \pi_\nu = \frac{i}{\Pi'(\mu^2)(q^2 - \mu^2)} + \dots$$

in der Umgebung der Polstelle.

Diesen Bindungszustand vergleichen wir mit einer Yukawatheorie pseudoskalarer Mesonen mit nackter Masse μ_0 .

$$(1.40) \quad \mathcal{L}_p = i G_0 \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi$$

und summieren die entsprechende Kette auf

$$(1.41) \quad S_f \equiv \text{diagram with shaded blob} = \text{diagram with blob} + \text{diagram with one loop} + \text{diagram with two loops} + \dots$$

Diese Reihe entspricht der Summation in (1.33), die ja alle Vakuumpolarisations-Blasen enthält. Wir berechnen den angezogenen Propagator über die Dyson-Gleichung

$$(1.42) \quad i \Delta_F' = i \Delta_F + G_0^2 i \Delta_F i \Pi i \Delta_F', \quad \Delta_F(q) = \frac{1}{q^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}$$

$$\Delta_F' = (q^2 - \mu_0^2 + G_0^2 \Pi(q^2))^{-1}$$

Wieder entwickeln wir Π um die Stelle der physikalischen Masse μ^2 und bezeichnen mit $\Pi_c(q^2)$ den Rest der Gleichung

$$(1.38) \quad \Pi_c = O((q^2 - \mu^2)^2) \text{ und setzen ein:}$$

$$(1.43) \quad \Delta_F' = (q^2 - \mu_0^2 + G_0^2 \Pi(\mu^2) + G_0^2 \Pi'(\mu^2)(q^2 - \mu^2) + G_0^2 \Pi_c(q^2))^{-1}$$

$$= ((q^2 - \mu^2)(1 + G_0^2 \Pi'(\mu^2)) + G_0^2 \Pi_c(q^2))^{-1}$$

$$= \frac{Z_\varphi}{q^2 - \mu^2}$$

in der Umgebung von $q^2 = \mu^2$. Wir haben dabei die Massenrenormierung, welche die quadratische Divergenz enthält,

$$(1.44) \quad \mu^2 = \mu_0^2 - G_0^2 \Pi(\mu^2)$$

vorgenommen. Das S-Matrixelement lautet in der Mesonentheorie

$$(1.45) \quad \mathcal{M}_\varphi = \frac{i G_p^2}{(q^2 - \mu^2)(1 + G_0^2 \Pi'(\mu^2)) + G_0^2 \Pi_c(q^2)} = \frac{i G_p^2}{q^2 - \mu^2} ; q^2 \approx \mu^2.$$

G_p ist die renormierte Meson-Kopplungskonstante. Die Renormierungskonstante Z_p wird also durch

$$(1.46) \quad G_p^2 = Z_\varphi G_0^2, \quad Z_p = 1 - G_0^2 \Pi'(\mu^2)$$

ausgedrückt. Wenn wir jetzt die Vierfermionentheorie mit der Mesonentheorie vergleichen, bekommen wir mit (1.39) und (1.45) die Bedingung für einen gebundenen Zustand

$$(1.47) \quad G_p^2 = \frac{1}{\Pi'(\mu^2)}.$$

Aus (1.46) ersehen wir, daß dies $Z_\varphi = 0$ impliziert, d.h. der Feldoperator kann nicht gegen ein asymptotisches Feld konvergieren. (1.37) und (1.47) stellen Bedingungen für die Funktion $\Pi(q^2)$ dar. In unserer Theorie stecken zwei freie Parameter, nämlich die Vierfermion-Kopplungskonstante g und der Cutoff Λ , der ein Maß für die Größe der Gitterkonstante des Raumes ist. Die gegenseitige Abhängigkeit der Größen μ und G_p einerseits und g und Λ andererseits wollen wir in Kapitel 2 genauer studieren.

Die Diskussion wurde hier für den pseudoskalaren Fall P durchgeführt, wir können aber ganz entsprechend auch die anderen Fälle Skalar S, Vektor V und Axialvektor A behandeln. Die Kopplungskonstante g ist allerdings über die Selbstkonsistenzbedingung (1.15) schon mit der Hartree-Fockmasse verknüpft. Diese Masse wird sich aber durch die Selbstenergie verändern, so daß wir, um die Beziehungen (1.37) und (1.47) besser studieren zu können, g als unabhängig von der Fermionenmasse betrachten.

Nach der Massenrenormierung der Fermionen kann g ohne weiteres wieder fixiert werden.

1.4 Anwendung auf die Gitterraumwechselwirkung

Bevor wir die Vakuumpolarisation für den Gitterraum berechnen, bringen wir den Wechselwirkungsoperator in eine Fierz-invariante Form. Die Fierz-Transformation besteht in der Vertauschung der beiden ψ -Operatoren bei festen $\bar{\psi}$ -Operatoren in H_W Gl. (1.4)

$$(1.48) \quad \begin{aligned} &: \bar{\psi}_{1\alpha} (O_{i\mu})_{\alpha\beta} \psi_{2\beta} \bar{\psi}_{3\gamma} (O_{i\mu})_{\gamma\delta} \psi_{4\delta} : = \\ &= \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} : \bar{\psi}_{1\alpha'} (O_{i\lambda})_{\alpha'\beta'} \psi_{4\beta'} \bar{\psi}_{3\gamma'} (O_{i\lambda})_{\gamma'\delta'} \psi_{2\delta'} : \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, 4$ sind die Spinorindizes. μ und λ stehen für S, P, V, A und T; die dabei gegebenenfalls auftretenden Vektor- und Tensorindizes wurden durch den Buchstaben i symbolisiert. Wir bringen die Operatoren auf der rechten Seite wieder in ihre alte Reihenfolge und beachten, daß innerhalb des Normalprodukts die Vertauschung zweier Operatoren nur ein Minuszeichen ergibt. Wir identifizieren dann $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma', \beta = \delta'$ und $\delta = \beta'$ und bekommen so die Gleichung für die Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$:

$$(1.49) \quad (O_{i\mu})_{\alpha\beta} (O_{i\mu})_{\gamma\delta} = - \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} (O_{i\lambda})_{\alpha\delta} (O_{i\lambda})_{\gamma\beta}$$

Ihre Lösung ist die bekannte Fierz-Matrix [40]

$$(1.50) \quad (c_{\lambda\mu}) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} S \\ P \\ V \\ A \\ T \end{matrix}$$

Die rechte Seite von (1.48) ist die Fierz-transformierte Darstellung der Wechselwirkung. Die halbe Summe der linken und der rechten Seite ist folglich invariant gegenüber Fierz-Transformationen. In einer Kurzschreibweise lautet

sie

$$(1.51) \quad A \times A \rightarrow \frac{1}{2} (S \times S - P \times P + \frac{1}{2} V \times V + \frac{3}{2} A \times A).$$

Aus dieser invarianten Gestalt der Wechselwirkung sieht man einfach, daß man Ketten- und Leitergraphen zusammenfassen kann. Denn wenn folgende Kontraktionen im Sinne des Wick-Theorems

$$:\bar{\psi} \hat{O}^i \psi \bar{\psi} \hat{O}^j \psi: \rightarrow \dots \rightarrow \text{Diagramm} \rightarrow \text{Diagramm}$$

der Kette entsprechen ($\hat{O}^i \in S, P, V, A$), so lassen sich die Kontraktionen

$$:\bar{\psi} \hat{O}^i \psi \bar{\psi} \hat{O}^j \psi: \rightarrow \dots \rightarrow \text{Diagramm} \rightarrow \text{Diagramm},$$

welche die Leiter bilden, durch Fierztransformation an jeden Vertex in die Kette überführen. Wir müssen also, um alle Graphen, die aus Mischungen von Leiter und Kette bestehen, zu berechnen, die jeweiligen Kettengraphen nehmen und jeden Vertex mit 2 multiplizieren. Bei der Aufsummation der Kette bekommt man jetzt statt einer Reihe von Zahlen $\Pi(q)$, Gl (1.33) und (1.36), eine Reihe von 4×4 -Matrizen im Raum der Wechselwirkungstypen S, P, V, A. Glücklicherweise hat (wie es sich anschließend ergibt) die Matrix, welche $\Pi(q)$ in (1.33) entspricht, die Gestalt

$$(1.52) \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{matrix} S \\ V \\ A \\ P \end{matrix}$$

die lediglich eine Interferenz zwischen Axialvektor und Pseudoskalar aufweist, so daß die Summation auch in diesem Fall keine Schwierigkeiten bereitet.

Explizit sehen wir dies, wenn wir die einzelnen Vakuum polarisations-Integrale nach den Feynmanregeln auf-

stellen. Der Graph $\hat{O}^i \text{Diagramm} \hat{O}^j$ hat in allen Fällen die

Struktur*

* Es stehen hier die Wurzeln aus den Kopplungskonstanten, weil $\hat{O}^i$ und $\hat{O}^j$ je nur der halbe Vierfermionenvertex sind.

$$(1.53)^* \quad -2i\sqrt{g} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp} (O^i(p+k+m) O^j(p-k+m))}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}$$

Wir berechnen die Spuren für alle Kombinationen und finden für die einzelnen Fälle:

$$\begin{aligned} SS &\equiv S & 4(m^2 + p^2 - k^2) \\ SV & & 8 m p^\mu \\ VV &\equiv V & 4[2(p^\mu p^\nu - k^\mu k^\nu) + g^{\mu\nu}(m^2 - p^2 + k^2)] \\ VA & & -8i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha k^\beta \\ AA &\equiv A & -4[2(k^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu) + g^{\mu\nu}(m^2 + p^2 - k^2)] \\ AP & & -8 m k^\mu \\ PP &\equiv P & 4(m^2 - p^2 + k^2) \\ SP, SA, VP & & 0 \end{aligned}$$

Die Beiträge von SV und VA verschwinden, weil in (1.53) der Integrand ungerade ist. Es verbleiben also die Integrale entsprechend der Definition (1.35)

$$\begin{aligned} \Pi^S(q^2) &:= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4(m^2 + p^2 - k^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)} \\ \Pi^P(q^2) &:= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4(m^2 - p^2 + k^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)} \\ (1.54) \quad \Pi^{\nu\mu}(q^2) &:= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8(p^\mu p^\nu - k^\mu k^\nu)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)} + g^{\mu\nu} \Pi^P(q^2) \\ \Pi^{\mu\mu}(q^2) &:= \Pi^{\nu\mu}(q^2) - g^{\mu\nu} (\Pi^S(q^2) + \Pi^P(q^2)) \\ k^\mu \Pi^{\mu P}(q^2) = -k^\mu \Pi^{PA}(q^2) &:= i 8 m k^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)} \end{aligned}$$

Wie eine Inspektion der Zähler- und Nennerpotenzen in p ergibt, sind alle Integrale bis auf das letzte quadratisch divergent und müssen abgeschnitten werden.

* Wir schreiben hier gleich die lorentzkovariante Form an, mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen. Die Gitterraum-Integrale betrachten wir im dritten Kapitel.

2. Explizite Durchführung mit Hilfe einer lorentzinvarianten Abschneidung

Ehe wir die Berechnung der Vakuumpolarisation für den Gitterraum vornehmen, wollen wir die Funktionen (1.54) mit einem lorentzinvarianten cutoff studieren, der einfacher anzuwenden ist. Zu diesem Zweck definieren wir alle Impulsintegrationen durch

$$(2.1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \theta(p^2 + \Lambda^2), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Das bedeutet, daß der räumliche Impuls bis zur oberen Grenze $\Lambda^2 + p_0^2$ integriert, die Energie aber nicht abgeschnitten wird, so daß wir ein ähnliches Verhalten der Feynman-Integrale wie im Gitterraum erwarten dürfen, dessen räumliche Impulse durch eine feste obere Grenze beschränkt sind. Damit haben wir die Möglichkeit, die Gitterraumtheorie mit einer entsprechenden lorentzinvarianten Theorie zu vergleichen.

2.1 Direkte Berechnung der Vakuumpolarisation für kleine Impulse

Die einzelnen Vakuumpolarisations-Integrale lassen sich für kleine Impulse - verglichen mit Λ - so zerlegen, daß die divergenten Anteile nur an der Stelle $k^2 = 0$ berechnet werden müssen. Die Auswertung von (1.54) geschieht über die Berechnung der Integrale

$$J_1(k^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\theta(p^2 + \Lambda^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}$$

(2.2)

$$J_2^{\mu\nu}(k^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu \theta(p^2 + \Lambda^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}$$

Wir zerlegen also J_1 , indem wir $J_1(0)$ gesondert berechnen

$$(2.3) \quad J_1(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^2}$$

und von $J_1(k^2)$ abziehen. Wir bringen die beiden Integranden auf den Hauptnenner und sehen, daß sich die höchste p^2 -Potenz heraushebt und das Integral nunmehr konvergiert. Da wir Terme $\sim O(\frac{1}{\Lambda})$ vernachlässigen wollen, können wir die θ -Funktion gleich weglassen (vgl. jedoch Abschnitt 2.2).

$$\begin{aligned}
 J_1(k) - J_1(0) &= -2k^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\
 (2.4) \quad &- k^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \\
 &+ 4k_\kappa k_\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\kappa p^\lambda}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \\
 &\equiv -2k^2 (J_4^\kappa{}_\kappa(k) - m^2 J_3(k)) - k^4 J_3(k) + 4k_\kappa k_\lambda J_4^{\kappa\lambda}(k).
 \end{aligned}$$

Das gleiche Verfahren wenden wir auf J_2 an.

$$(2.5) \quad J_2^{\mu\nu}(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu \theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^2}$$

Im Unterschied zu J_1 treten in den Zählern die Faktoren $p^\mu p^\nu$ auf, wodurch das erste und das letzte Integral in (2.4) nicht mehr konvergieren und wir die θ -Funktion beibehalten müssen.

$$\begin{aligned}
 J_2^{\mu\nu}(k) - J_2^{\mu\nu}(0) &= -2k^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu \theta(p^2 + \Lambda^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\
 (2.6) \quad &- k^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \\
 &+ 4k_\kappa k_\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu p^\kappa p^\lambda \theta(p^2 + \Lambda^2)}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \\
 &\equiv -2k^2 J_5^{\mu\nu}(k) - k^4 J_6^{\mu\nu}(k) + 4k_\kappa k_\lambda J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k).
 \end{aligned}$$

Eine weitere explizite Zerlegung der Integrale, um noch die restlichen Divergenzen abzuspalten, ist unhandlich und fügt sich besser im Verlauf der Rechnung ein. Wir ziehen nur noch die Integrale

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad J_5^{\mu\nu}(0) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu \theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dm^2} J_2^{\mu\nu}(0) \\
 J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu p^\kappa p^\lambda \theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^4}
 \end{aligned}$$

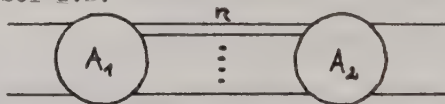
heraus. Insgesamt müssen wir erstens die drei Integrale $J_1(0)$, $J_2^{\mu\nu}(0)$ und $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$ berechnen, die explizit vom cutoff abhängen, und zweitens die Integrale $J_3(k)$, $J_4^{\mu\nu}(k)$, $J_5^{\mu\nu}(k) - J_5^{\mu\nu}(0)$ und $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) - J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$, die konvergieren und keinen cutoff mehr enthalten. Die Rechnungen können mit Hilfe der Feynmanschen Methoden ohne Schwierigkeit durchgeführt werden, sind aber langwierig und werden im Anhang II gebracht. Wir setzen die Ergebnisse in (2.2) und weiter in (1.54) ein und haben für $k^2 \ll \Lambda^2$ und $q^2 = 2k^2$

$$\begin{aligned} \Pi^J(q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[-\Lambda^2 + (3m^2 - 2k^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 2m^2 - \frac{5}{2}k^2 - 4(m^2 - k^2) \ell_1(k^2) \right] \\ \Pi^P(q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - (m^2 - 2k^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{5}{2}k^2 - 4k^2 \ell_1(k^2) \right] \\ \Pi^{\nu\mu}(q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \left(\frac{4}{3}k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{13}{9}k^2 + \frac{4}{9}m^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{3}(m^2 + 2k^2) \ell_1(k^2) \right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Lambda^2 - m^2 + \frac{k^2}{2}) \right] \\ (2.8) \quad \Pi^{\mu\nu}(q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \left(\frac{4}{3}k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{13}{9}k^2 + \frac{4}{9}m^2 - \frac{4}{3}(m^2 + 2k^2) \ell_1(k^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\Lambda^2 - 2m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{5}{2}m^2 + \frac{1}{6}k^2 + 4m^2 \ell_1(k^2) \right) \right] \\ \Pi^{AP}(q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} (-2m) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - 2 \ell_1(k^2) \right] \\ \ell_1(k^2) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2 - k^2}{k^2}} \arctg \sqrt{\frac{k^2}{m^2 - k^2}} & \text{für } m^2 > k^2 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{k^2}} \left(\ln \frac{k + \sqrt{k^2 - m^2}}{k - \sqrt{k^2 - m^2}} - i\pi \right) & \text{für } k^2 > m^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktionen haben bei $k^2 = m^2$ d.h. bei $q^2 = 4m^2$ einen logarithmischen Verzweigungsschnitt und sind für kleinere k^2 reell. Oberhalb der Schwelle $q^2 = 4m^2$ schneiden wir die q^2 -Ebene längs der positiven reellen Achse auf. Dann sind die Vakuumpolarisationsintegrale analytisch in der ganzen aufgeschnittenen Ebene. Dies steht im Einklang mit den Überlegungen zur Lehmann-Källén-Darstellung, da die Zwischenzustände bei den Energien der 2-Fermionzustände beginnen.

2.2 Beliebige Impulse: Anwendung der Dispersionsrelationen

Aus (2.8) sehen wir, daß die Diskontinuitäten der Integrale längs des Verzweigungsschnitts eine einfachere Gestalt haben als das volle Integral. Man könnte sich also, wenn man den Imaginärteil längs der reellen Achse leichter berechnen könnte, über eine Dispersionsrelation die volle Funktion bestimmen. Tatsächlich ist es möglich, wie Cutcosky gezeigt hat [18], die Diskontinuitäten eines Feynmangraphen durch ein einfacheres Integral auszudrücken. Sei z.B.



ein zu einer bestimmten Schwelle gehöriger reduzierter Graph [12] für die Streuamplitude A , so lautet die Cutcosky-Formel für die anschließende Singularität

$$(2.9) \quad \text{disk } A = 2i \mathcal{J}_m A = \int \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^n (-2\pi i \delta^+(p_i^2 - m_i^2)) A_1 A_2.$$

Dabei sind A_1 und A_2 Teilgraphen, die nicht an der Erzeugung der Singularität beteiligt sind, und die δ^+ -Funktion ist eine Abkürzung für $\delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_{i0})$, es wird also die positive Energie gemäß der Spektralbedingung herausprojiziert. Die $n-1$ Impulse p_i gehören zu den unabhängigen Schleifen des Graphen, über welche integriert wird. Die Formel läßt sich in der Homologietheorie allgemein beweisen und führt die Singularitäten eines Integrals auf die Singularitäten seines Integranden zurück [19].

Unsere Integrale haben einen einzigen Verzweigungsschnitt, wie wir gesehen haben und auch über die Landaubedingungen prüfen können, nämlich den, der entsteht, wenn man beide Fermionenner durch eine δ^+ -Funktion ersetzt. Wir wollen dies am Beispiel von $\mathcal{J}_1(k^2)$ (2.2) ausführen. Wir berechnen das Integral

$$(2.10) \quad \text{disk } J_1(k^2) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4p \, \theta(k_0 + p_0) \theta(k_0 - p_0) \theta(p^2 + \Lambda^2) \times \\ \times \delta((k+p)^2 - m^2) \delta((k-p)^2 - m^2)$$

und zwar oberhalb der Schwelle, da wir schon wissen, daß unterhalb die Diskontinuität verschwindet. Es gilt also

$$(2.11) \quad k_0^2 - \underline{k}^2 \geq m^2.$$

Mit Hilfe der ersten δ -Funktion führen wir die p_0 -Integration aus. Nach der Formel

$$(2.12) \quad \delta(f(x)) = \sum_{x_i \text{ Nullst. von } f} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

erhalten wir, da die Nullstellen

$$(2.13) \quad p_0 = -k_0 \pm \sqrt{(\underline{k} + \underline{p})^2 + m^2}$$

sind, von denen die negative durch die θ -Funktion wegprojiziert wird, mit der Substitution $\underline{q} = \underline{p} + \underline{k}$ das räumliche Volumenintegral ($|\underline{q}| = q$)

$$(2.14) \quad \text{disk } J_1(k^2) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3q \, \theta(2k_0 - \sqrt{q^2 + m^2}) \theta((k_0 + \sqrt{q^2 + m^2})^2 - (q - k)^2 + \Lambda^2) \times \\ \times \frac{1}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \delta((2k_0 - \sqrt{q^2 + m^2})^2 - (2\underline{k} - \underline{q})^2 - m^2).$$

Wir nennen den Betrag des räumlichen Anteils von $\underline{k}$: $|\underline{k}| =: \hat{k}$ und $\hat{q}$ den Kosinus des Winkels ^{zwischen} $\underline{p}$ und $\underline{k}$. Damit ist das Argument der zweiten θ -Funktion

$$(2.15) \quad (-k_0 + \sqrt{q^2 + m^2})^2 - (q - \hat{k})^2 + \Lambda^2 = k^2 - 2k_0 \sqrt{q^2 + m^2} + (\Lambda^2 + m^2) + 2\hat{k}q$$

und das Argument der δ -Funktion

$$(2.16) \quad (2k_0 - \sqrt{q^2 + m^2})^2 - (2\underline{k} - \underline{q})^2 - m^2 = 4k^2 - 4k_0 \sqrt{q^2 + m^2} + 4\hat{k}q.$$

(2.16) hat eine Nullstelle bei

$$(2.17) \quad \hat{q} = -\frac{1}{\hat{k}q} (k^2 - k_0 \sqrt{q^2 + m^2}).$$

Weil aber der Betrag des Kosinus durch Eins beschränkt ist, impliziert dies eine Beschränkung für q

$$(2.18) \quad 0 \leq q_1 = -\hat{k} + k_0 \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{k^2}} \leq q \leq \hat{k} + k_0 \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{k^2}} = q_2,$$

so daß nach Ausführung der Winkelintegrationen und Berücksichtigung von (2.11) und (2.14) ein einfaches Integral übrigbleibt.

$$\begin{aligned} \text{disk } J_1(k^2) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{q_1}^{q_2} q^2 dq \, \theta(2k_0 - \sqrt{q^2 + m^2}) \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{1}{4k} \times \\ (2.19) \quad &\times \theta(k^2 - 2k_0 \sqrt{q^2 + m^2} + \Lambda^2 + m^2 - 2(k^2 - k_0 \sqrt{q^2 + m^2})) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \theta(\Lambda^2 + m^2 - k^2) \int_{q_1}^{q_2} dq^2 \frac{\theta(2k_0 - \sqrt{q^2 + m^2})}{2 \sqrt{q^2 + m^2}} \end{aligned}$$

Die Bedingung der θ -Funktion

$$(2.20) \quad 2k_0 \geq \sqrt{q^2 + m^2}$$

ist nach (2.18) zumindest für kleine $\hat{k}$ immer erfüllt, was wir wegen der Lorentzinvarianz so einrichten können. Die Integration kann nun unmittelbar ausgeführt werden ($\sqrt{k^2} =: k$)

$$\begin{aligned} \text{disk } J_1(k^2) &= -\frac{i}{16\pi} \theta(\Lambda^2 + m^2 - k^2) \frac{1}{k} \sqrt{q^2 + m^2} \Big|_{q_1}^{q_2} \\ (2.21) \quad &= -\frac{i}{16\pi} \theta(\Lambda^2 + m^2 - k^2) \frac{1}{k} \left[\frac{1}{k} (\hat{k} \sqrt{k^2 - m^2} + k \sqrt{k^2 + k^2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k} (-\hat{k} \sqrt{k^2 - m^2} + k \sqrt{k^2 + k^2}) \right] \\ &= -\frac{i}{8\pi} \frac{\sqrt{k^2 - m^2}}{k} \theta(\Lambda^2 + m^2 - k^2). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch mit der Diskontinuität bei kleinen Impulsen, wie man leicht an π^{Λ^2} in (2.8) nachprüft, bis auf die θ -Funktion, die zeigt, daß unser cut-off den Imaginärteil oberhalb von $\Lambda^2 + m^2$ abschneidet. Da wir die θ -Funktion, welche Λ^2 enthält, unabhängig vom übrigen Integranden nach (2.19) immer vor das Integral ziehen können, schließen wir, daß dies gleicherweise für alle unsere Integrale gilt.

Nachdem wir die Diskontinuitäten für alle Impulse bestimmt haben, berechnen wir uns die Funktionen über den Cauchyschen Satz. Die Integrale haben die Dimension $\frac{1}{k^2}$,
darum wissen wir, daß sie höchstens wie q^2 asymptotisch gegen Unendlich gehen. Wir brauchen also allenfalls zwei Subtraktionen. Wir wollen die Rechnung jetzt für π^S durchführen. Statt π^S berechnen wir die Funktion

$$(2.22) \quad \tilde{\pi}^S(k^2) := \frac{1}{k^2} (\pi^S(q^2) - \pi^S(0) - \pi^{S'}(0) \cdot k^2).$$

$\tilde{\Pi}^s$ geht asymptotisch wie k^{-2} gegen Null ($k^2 \rightarrow \infty$) und garantiert, daß das Cauchy-Integral auf jeden Fall existiert

$$(2.23) \quad \tilde{\Pi}^s(k^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m^2}^{\Lambda^2+m^2} dJ \frac{\text{disk } \tilde{\Pi}^s(J)}{J - k^2}$$

Die Diskontinuität von $\tilde{\Pi}^s$ ist nach (2.22) und (2.8)

$$(2.24) \quad \text{disk } \tilde{\Pi}^s(J) = \text{disk } \frac{\Pi^s(J)}{J^2} = \frac{i}{\pi} \frac{(J - m^2)^{3/2}}{J^{5/2}}$$

Die beiden Konstanten $\Pi^s(0)$ und $\Pi^{s'}(0)$ kann man aber aus (2.23) nicht bestimmen, sondern müssen aus den früheren Rechnungen (2.8) entnommen werden.

Das Integral

$$(2.25) \quad \tilde{\Pi}^s = \frac{1}{2\pi^2} \int_{m^2}^{\Lambda^2+m^2} \frac{dJ}{J} \frac{1}{J - k^2} \left(\frac{J - m^2}{J}\right)^{3/2}$$

läßt sich mit der Substitution $x^2 = (J - m^2)/J$ in die Form

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \tilde{\Pi}^s &= \frac{1}{\pi^2 k^2} \int_0^{\sqrt{\Lambda^2/(\Lambda^2+m^2)}} dx \frac{x^4}{x^2 - \frac{k^2 - m^2}{k^2}} \\ &= \frac{1}{\pi^2 k^2} \left[\int dx \left(x^2 + \frac{k^2 - m^2}{k^2}\right) + \left(\frac{k^2 - m^2}{k^2}\right)^2 \int dx \frac{1}{x^2 - \frac{k^2 - m^2}{k^2}} \right] \end{aligned}$$

überführen und läßt sich ganz elementar auswerten. Das Ergebnis ist mit (2.22)

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \Pi^s(q^2) &= \Pi^s(0) + k^2 \Pi^{s'}(0) + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{4}{3} k^2 - m^2\right) \sqrt{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{\Lambda^2 + m^2} \frac{k^2}{3} + \frac{1}{3} \frac{(k^2 - m^2)^{3/2}}{k} \left\{ \ln \frac{k \sqrt{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}} - \sqrt{k^2 - m^2}}{k \sqrt{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}} + \sqrt{k^2 - m^2}} + \pi i (\arg(k^2 - \Lambda^2 - m^2) - \arg(k^2 - m^2)) \right\} \right] \end{aligned}$$

Dies muß identisch sein mit dem $\Pi^s(q^2)$ aus (2.8)*, so daß wir das Feynmanintegral für alle Impulse erhalten, indem wir lediglich die Logarithmusfunktion durch die mit $\sqrt{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}}$ modifizierte zu ersetzen haben. Die Ersetzung führen wir auch in den übrigen Integralen durch und prüfen leicht nach, daß unsere Funktionen die richtigen Diskontinuitäten haben. Damit sind alle Integrale für alle Impulse exakt berechnet.

* $\Pi^s(0)$ und $\Pi^{s'}(0)$ erhalten wir durch Vergleich mit den Konstanten in (2.8). Wir haben diese Konstanten nur bis auf $O(\frac{1}{\Lambda^2})$ angegeben, die exakten Werte lassen sich aber unschwer bestimmen, wie man sich nach Anhang II 5), 6), 7) überzeugt.

2.3 Die Lage der Bindungszustände in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante

Nachdem wir die Vakuumpolarisation berechnet haben, gehen wir daran, die Ketten aufzusummieren. Da die Matrix (1.52) aber nicht rein diagonal ist, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Skalar und Vektor dürfen unabhängig summiert werden und wir bekommen mit (vgl. (2.8))

$$(2.28) \quad \pi^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} u_1(k^1) - \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{k^1})$$

das (1.36) entsprechende S-Matrixelement

$$(2.29) \quad \mathcal{M}_S = \frac{-2ig}{1-3g} \pi^1, \quad \mathcal{M}_V = \frac{-2i\frac{1}{2}g}{1-g} (g^{\mu\nu} - \frac{g u_1}{1-g(u_1-u_1)} \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{k^1}).$$

Dabei haben wir die Kopplungskonstanten, die sich aus (1.51) ergeben, eingesetzt. Im Falle von Axialvektor und Pseudoskalar ist es erforderlich, die Matrix

$$(2.30) \quad 1 - 2g \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \pi^{\mu\nu} & \sqrt{\frac{3}{2}} \pi^{\mu\rho} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \pi^{\mu\rho} & -\pi^\rho \end{pmatrix}$$

zu invertieren. Mit der Darstellung (vgl. (2.8))

$$(2.31) \quad \pi^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} a_1(k^1) - \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{k^1})$$

ergibt sich für den Axialvektor

$$(2.32) \quad \mathcal{M}_A = \frac{-2i\frac{1}{2}g}{1-3ga_1} (g^{\mu\nu} - \frac{3ga_1(1+2g\pi^1) - 6g^2(\pi^{\mu\rho})^2 k^1}{(1+2g\pi^1)(1-3g(a_1-a_1)) - 6g^2(\pi^{\mu\rho})^2 k^1} \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{k^1}),$$

den Pseudoskalar

$$(2.33) \quad \mathcal{M}_P = \frac{2ig(1-3g(a_1-a_1))}{(1+2g\pi^1)(1-3g(a_1-a_1)) - 6g^2(\pi^{\mu\rho})^2 k^1}$$

und das Nicht-Diagonalelement

$$(2.34) \quad \mathcal{M}_{AP} = -\mathcal{M}_{PA} = \frac{-2i\sqrt{\frac{3}{2}}g\sqrt{6}\pi^{\mu\rho}k^\mu}{(1+2g\pi^1)(1-3g(a_1-a_1)) - 6g^2(\pi^{\mu\rho})^2 k^1}.$$

Bei kleinen k^2 , für welche wir hier suchen, ist, wie (2.8) zeigt, der Λ^1 -Term dominierend. Da wir wegen (1.15) eine Kopplungskonstante $g < 0$ haben, sehen wir, daß ein Bin-

dungszustand nur für Skalar und Pseudoskalar möglich ist. Nach (2.29) oder (2.33) gilt

$$(2.35) \quad 1 \approx -g \frac{\Lambda^2}{2\pi^2}$$

was nach (1.3) und der Einleitung $W \sim \sqrt{E}$ bedeutet, sofern wir Λ nach (3.1) mit der Gitterraum-Abschneidung identifizieren. Π^{AP} enthält keinen quadratisch divergierenden Term, so daß

$$(2.36) \quad g \Pi^{AP} = O(\Lambda^{-2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2})$$

ist und er gehört zu denjenigen Ausdrücken, die wir in unseren Formeln vernachlässigen dürfen. $\mathcal{M}_{AP}$ enthält zwar einen Pol, aber sein Residuum ist klein; das gleiche gilt auch für den $k^{\mu\nu}$ -Term in $\mathcal{M}_A$ (2.32). Somit lauten (2.32) und (2.33)

$$(2.37) \quad \mathcal{M}_P \approx \frac{-2ig}{1+2g\Pi^P(q)}, \quad \mathcal{M}_A \approx \frac{-2i\frac{3}{2}g}{1-3ga_1} (g^{\mu\nu} - \frac{3ga_2}{1-3g(a_1-a_2)} \frac{k^{\mu\nu}}{k^2}).$$

Die Pole von $\mathcal{M}_S$ und $\mathcal{M}_P$ liegen nahe beieinander: Sei μ_0^2 die Nullstelle von $1+2g\Pi^P(q)$, so gilt

$$(2.38) \quad 1 - \frac{2g}{4\pi^2} (-\Lambda^2 + (m^2 - \frac{\Lambda^2}{2}) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{5}{8}\mu_P^2 + \mu_P^2 \ell_1(\frac{\Lambda^2}{4})) = 0$$

die Nullstelle μ_S^2 von $1-2g\Pi^S(q^2)$ ist durch die Gleichung

$$(2.39) \quad 1 - \frac{2g}{4\pi^2} (-\Lambda^2 + (3m^2 - \frac{\Lambda^2}{2}) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 2m^2 - \frac{5}{8}\mu_S^2 - 4(m^2 - \frac{\Lambda^2}{4}) \ell_1(\frac{\Lambda^2}{4})) = 0$$

gegeben. Die Differenz beider Gleichungen ist

$$(2.40) \quad (-2m^2 - \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^2}{2}) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 2m^2 - \frac{5}{8}\mu_P^2 + \frac{5}{8}\mu_S^2 + \mu_P^2 \ell_1(\frac{\Lambda^2}{4}) + (4m^2 - \mu_S^2) \ell_1(\frac{\Lambda^2}{4}) = 0$$

Die logarithmische Divergenz ist wegen $\ln \Lambda^2 \gg m^2$ viel größer als die übrigen Terme und wir können die Beziehung

$$(2.41) \quad \mu_S^2 \approx 4m^2 + \mu_P^2$$

zwischen skalarer und pseudoskalarer Masse ablesen. Wenn man fordert, daß die Hartree-Focksche Selbstkonsistenzbedingung (1.15) erfüllt sein soll, hat das pseudoskalare Teilchen die Masse Null [9] und (2.40) wird

$$(2m^2 - \mu_j^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 2m^2 - \frac{5}{8} \mu_j^2 - (4m^2 - \mu_j^2) \ell_1 \left(\frac{\Lambda^2}{4} \right) = 0$$

(2.42) oder

$$(4m^2 - \mu_j^2) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ell_1 \left(\frac{\Lambda^2}{4} \right) + \frac{5}{8} \right) = \frac{1}{2} m^2.$$

Der zweite Faktor auf der linken Seite ist sicher größer als Null, so daß der erste auch positiv sein muß. Der skalare Pol sitzt also knapp unterhalb der Schwelle und wir haben im Fall eines masselosen pseudoskalaren Teilchens auch einen skalaren Bindungszustand [15]. Wir wollen aber bei unserer Diskussion die Kopplungskonstante beliebig lassen, so daß wir für alle vier Fälle S, P, V, A Pole zu jeder Masse erreichen können.

2.4 Stärke der Boson-Fermion-Kopplung in Abhängigkeit vom cutoff

Die Kopplungskonstanten erhalten wir über die Ableitungen* der Vakuumpolarisations-Integrale nach q^2 . Wir differenzieren (2.8) und erhalten für $\ell_i(q^2)$ die Ableitungen

$$\ell_1' = - \frac{2m^2 q}{q^4 \sqrt{4m^2 - q^2}} \operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}} + \frac{1}{2q^2} \quad \text{für } q^2 < 4m^2$$

(2.43)

$$\ell_1' = \frac{m^2}{q^4} \frac{q}{\sqrt{q^2 - 4m^2}} \left(\ln \frac{q - \sqrt{q^2 - 4m^2}}{q + \sqrt{q^2 - 4m^2}} - i\pi \right) + \frac{1}{2q^2} \quad \text{für } q^2 > 4m^2$$

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir die Funktionen in der Variablen

$$y := \frac{q^2}{4m^2},$$

(2.44)

welche das Massenverhältnis zwischen Bosonen und Fermionen ausdrückt, darstellen. Das ergibt bei Skalar und Pseudoskalar

$$(2.45) \quad \Pi^{S'}(q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2y} + \left(\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y} - 1 \right) \sqrt{\frac{y}{1-y}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right], y < 1$$

* vgl. (1.47)

$$(2.46) \quad \pi^p(q^2) = \frac{1}{4m^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2y} - 1 \right) \sqrt{\frac{y}{1-y}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right].$$

Pole von Vektor und Axialvektor sind durch den $g^{\nu\nu}$ -Term bestimmt, deshalb müssen wir die Ableitung von U_1 und a_1 bilden (2.31) (2.28)

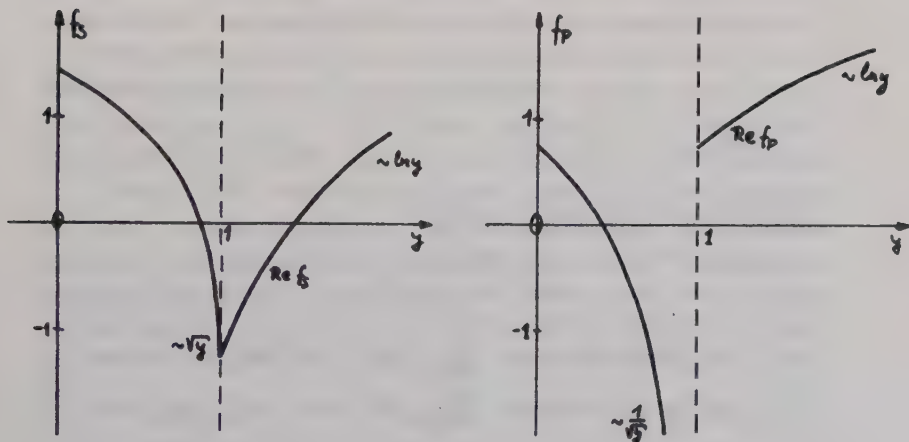
$$(2.47) \quad U_1'(q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{5}{72} - \frac{1}{6y} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 4 \right) \sqrt{\frac{y}{1-y}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right],$$

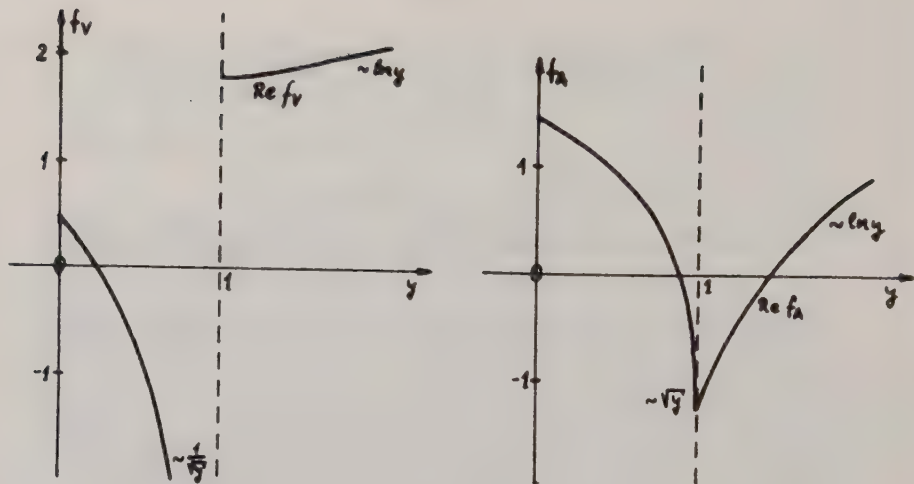
$$(2.48) \quad a_1'(q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{5}{72} + \frac{1}{3y} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 2 \right) \sqrt{\frac{y}{1-y}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right].$$

Oberhalb der Schwelle ist nach (2.43) statt des Arcustangens jeder Logarithmus einzusetzen. Nach (1.47) sind diese Ausdrücke an der Polstelle das Reziproke das Quadrats der jeweiligen Boson-Fermion-Kopplungskonstanten. Wir ziehen die logarithmische Divergenz auf die linke Seite und tragen die vier Funktionen

$$(2.49) \quad f_{\gamma p} := \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{8\pi^2}{G_{\gamma p}^2}, \quad f_{\gamma A} := \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{12\pi^2}{G_{\gamma A}^2}$$

gegen y auf, wobei wir oberhalb der Schwelle $y=1$ nur den Realteil einzeichnen.





Unterhalb der Schwelle sind die f_i ($i=S, V, P, A$) durch kleine Zahlen nach oben beschränkt, so daß für die Kopplungskonstanten näherungsweise

$$(2.50) \quad \frac{G_P^2}{4\pi^2} \approx \frac{2}{g_1 \frac{\Lambda^2}{m_1^2}}, \quad \frac{G_V^2}{4\pi^2} \approx \frac{3}{g_1 \frac{\Lambda^2}{m_1^2}}$$

gilt, außer bei P und V in der Nähe von $y=1$. Die Kopplungskonstanten sind für $m_i=0$ am größten und nehmen bei wachsender Masse ab. Allerdings ist diese Abnahme für Skalar und Axialvektor gering, aber für Pseudoskalar und Vektor geht die Kopplung gegen Null, wenn die Massen gegen $2m$ gehen. Oberhalb der Schwelle sind die Verhältnisse ähnlich: alle f_i sind für kleine y klein. Für große y schließlich verhalten sie sich wie $\ln y$ und man kann Resonanzen mit starker Kopplung erwarten. Der Pol bekommt aber einen sehr großen Imaginärteil, so daß die Resonanzen sehr breit werden. (2.50) gibt für den Pseudoskalar eine Kopplungskonstante $\frac{G_P^2}{4\pi^2} \approx 10^{-2}$, was verglichen mit der Pion-Nukleonkopplung $\frac{G_{\pi N}^2}{4\pi^2} \approx 15$ ziemlich klein ist.

2.5 Eine Wechselwirkung, die gleichzeitig pseudoskalare und vektorielle Teilchen enthält

Die Gitterraumwechselwirkung läßt nicht gleichzeitig pseudoskalare und vektorielle Bindungszustände zu. Wir können aber Wechselwirkungen betrachten, bei denen dies möglich ist. Alle Fierz-invarianten Wechselwirkungen lassen sich als Linearkombination der folgenden drei linear unabhängigen Kombinationen bilden

$$\begin{aligned}
 & \text{I} \quad S \times S + P \times P - T \times T \\
 (2.51) \quad & \text{II} \quad V \times V + A \times A \\
 & \text{III} \quad 2S \times S - 2P \times P - V \times V + A \times A
 \end{aligned}$$

Man sieht dies leicht aus der Fierz-Matrix (1.50). Da wegen (2.35), (2.27), (2.29) und (2.8) die quadratischen Divergenzen für Vektor und Pseudoskalar gleich sein müssen, brauchen wir nach (2.8) ein Verhältnis $P \times P : V \times V = 1 : 2$ der Teilkopplungen. Wenn wir noch tensorielle Wechselwirkungen ausschließen wollen, gelangen wir zur Wechselwirkung

$$(2.52) \quad S \times S - P \times P - 2V \times V - A \times A,$$

die neben Skalar und Pseudoskalar auch noch einen vektoriellen Pol haben kann. Wir bestimmen zuerst die Lage des Vektorpols gegenüber der pseudoskalaren Masse. Dazu müssen wir von (2.38) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 (2.53) \quad 1 + 4g v_1 = 0 &= 1 + \frac{2g}{4\pi^2} (\Lambda^2 + \frac{2}{3} \mu_V^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \\
 &+ \frac{2g}{36} \mu_V^2 + \frac{5}{3} m^2 - \frac{g}{3} (m^2 + \frac{\mu_V^2}{3}) \ell_1(\frac{\mu_V^2}{4}))
 \end{aligned}$$

abziehen und erhalten wegen der Dominanz der logarithmischen Divergenz wie bei (2.40)

$$(2.54) \quad m^2 - \frac{\mu_P^2}{3} + \frac{2}{3} \mu_V^2 \approx 0, \quad \mu_V^2 \approx \frac{3}{4} (\mu_P^2 - 2m^2).$$

Die Vektormasse ist also kleiner als die des Pseudoskalars, genau umgekehrt wie bei den Mesonen. Ist die pseu-

doskalare Masse kleiner als $\sqrt{2}m$, so würde μ_V^2 negativ. Ist andererseits die Masse des Vektorteilchens gleich Null, d.h. $\mu_P^2 = 2m^2$, so wäre die Kopplungskonstante nach (2.50) in der Größenordnung der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante, daß man versucht ist, das Vektorteilchen als Photon aufzufassen. Allerdings ist das Verhältnis der Kopplungskonstanten, vgl. (2.50), $G_P^2 \approx \frac{2}{3} G_V^2$, so daß das pseudoskalare Teilchen eine kleinere Kopplungskonstante hätte. Dies ist selbst im Beispiel der starken Wechselwirkung nicht erfüllt, wenn man die Pion-Nukleonmit der Rho-Nukleon-Kopplung vergleicht: $G_P^2 \approx 3 G_V^2$ [20].

2.6 Behandlung des Teilchen-Teilchen-Kanals

Wir haben bislang gebundene Zustände von Teilchen-Antiteilchenpaaren untersucht. Es ist zu erwarten, daß wir die Rechnungen auch auf die Teilchen-Teilchen-Streumplituden übertragen können; denn die Leitergraphen der Teilchen-Teilchen-Streuung haben eine ähnliche Struktur wie die Graphen des Teilchen-Antiteilchen-Kanals. Bei der Teilchen-Teilchen-Streuung treten aber keine Kettengraphen auf. Dafür gehört zu jedem Leitergraphen noch ein Austauschgraph, bei dem z.B. die beiden auslaufenden Teilchen vertauscht sind



Wir führen jetzt die Berechnung der Leitergraphen auf die Berechnung von Ketten zurück, damit wir unsere Integrale für die Vakuumpolarisation einsetzen können. Dies geschieht über eine Umordnung der Wechselwirkung von der Stromdarstellung auf die sogenannte Normaldarstellung

$$(2.55) \quad \bar{\psi} \, O_\mu \, \psi \, \bar{\psi} \, O_\mu \, \psi \quad \rightarrow \quad \bar{\psi} \, \tilde{O}_\lambda \, \bar{\psi}^T \, \psi^T \, \tilde{O}_\lambda \, \psi$$

Der neue Vierfermionenvertex  überträgt die Fermionenzahl 2. Weil der Wechselwirkungsoperator bei der Antivertauschung der beiden ψ - bzw. $\bar{\psi}$ -Operatoren in sich übergeht, so enthält die Normaldarstellung allenfalls die sechs antisymmetrischen Diracmatrizen. Der Austauschgraph hat denselben Wert, was bedeutet, daß jeder Kettengraph mit 2 zu multiplizieren ist.

Um bei der Normaldarstellung wieder zu einer Lorentzinvarianten Form zu kommen, suchen wir die bilinearen Kovarianten der Gestalt $u^T \Gamma_i u$, wobei Γ_i die sechzehn Dirac-Matrizen durchläuft. Wir fragen z.B. nach der Matrix Γ_5 für den Lorentz-Skalar. Bei einer infinitesimalen Lorentz-Transformation

$$(2.56) \quad S = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta \omega^{\mu\nu}$$

mit

$$(2.57) \quad \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta \omega^\mu_\nu, \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

bekommen wir

$$(2.58) \quad \begin{aligned} u^T \Gamma_5 u &\rightarrow u^T (1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^T \Delta \omega^{\mu\nu}) \Gamma_5 (1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta \omega^{\mu\nu}) u \\ &= u^T \Gamma_5 u - \frac{i}{4} u^T (\sigma_{\mu\nu}^T \Gamma_5 + \Gamma_5 \sigma_{\mu\nu}) u \Delta \omega^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Darum muß

$$(2.59) \quad \sigma_{\mu\nu}^T \Gamma_5 + \Gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = 0$$

sein. Die Transponierten der Matrizen γ^μ erhält man durch die Beziehung

$$(2.60) \quad \gamma^{\mu T} = B \gamma^\mu B^T, \quad B^T = B^\dagger = B^{-1}, \quad B = \gamma^3 \gamma^1$$

so daß

$$(2.61) \quad \sigma_{\mu\nu}^T = -B^T \sigma_{\mu\nu} B$$

ist. Damit wird Gl. (2.59) $[B \Gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$. Zwei Matrizen vertauschen mit allen $\sigma_{\mu\nu}$, nämlich die Einheit und Γ_5 , die, wie man aus der Raumspiegelung sofort sieht, den Skalar und den Pseudoskalar darstellen. Wir haben also die Kovarianten

$$(2.62) \quad u^T B u \text{ Skalar, } u^T B \gamma_5 u \text{ Pseudoskalar}$$

gefunden. Entsprechend weist man nach, daß man für Vektor und Axialvektor die Folgenden Ausdrücke hat:

$$(2.63) \quad u^T \gamma^\mu u \quad \text{Vektor}, \quad u^T \gamma^\mu \gamma_5 u \quad \text{Axialvektor}.$$

Die verbleibenden 6 Matrizen bilden den Tensor. Mit

$u_1^T \Gamma_i u_2$ ist auch $(u_1^T \Gamma_i u_2)^*$ eine Kovariante. Dann gilt

$$(2.64) \quad (u_1^T \Gamma_i u_2)^* = u_1^\dagger \Gamma_i^* u_2^* = \bar{u}_1 \gamma_0 \Gamma_i^* \gamma_0 \bar{u}_2^T = \bar{u}_1 \gamma_0 \Gamma_i^\dagger \gamma_0 \bar{u}_2^T \\ = \bar{u}_2 \Gamma_i \bar{u}_1^T = \bar{u}_1 \Gamma_i^T \bar{u}_2^T,$$

wenn die Γ_i die Matrizen $1, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}$ durchlaufen.

Die Transformation auf Normaldarstellung führen wir jetzt aus:

$$(2.65) \quad : \bar{\psi}_\alpha (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \psi_\beta : \bar{\psi}_\gamma (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} \psi_\delta : = \sum_{n=1}^{16} c_n \tilde{O}_{\alpha\beta}^{nT} \tilde{O}_{\gamma\delta}^n : \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta : \\ = - \sum_{n=1}^{16} c_n \tilde{O}_{\alpha\beta}^{nT} \tilde{O}_{\gamma\delta}^n : \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\gamma \psi_\beta \psi_\delta :.$$

Die $\tilde{O}^n$ durchlaufen die 16 Diracmatrizen und durch Koeffizientenvergleich bekommt man ein Gleichungssystem für die c_n , das im Anhang V behandelt wird. Nach der Bestimmung der c_n ergibt sich die kovariante Gestalt der Wechselwirkung

$$(2.66) \quad : \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi : \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi : = : \bar{\psi} \mathcal{B}^T \bar{\psi}^T \psi^T \mathcal{B} \psi : + : \bar{\psi} \gamma_5 \mathcal{B}^T \bar{\psi}^T \psi^T \mathcal{B} \gamma_5 \psi : \\ + \frac{1}{2} : \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{B}^T \bar{\psi}^T \psi^T \mathcal{B} \gamma_\mu \psi :$$

oder in Kurzschreibweise

$$(2.67) \quad A \times A \rightarrow \hat{S} \times \hat{S} + \hat{P} \times \hat{P} + \frac{1}{2} \hat{V} \times \hat{V},$$

wobei das Dach die Normaldarstellung andeuten soll.

Es bleibt uns noch, die Feynman-Integrale explizit anzuschreiben, um sie mit Gleichung (1.53) zu vergleichen. Wir betrachten die Schleife



$$\dots \psi^T \mathcal{B} \hat{O}^i \psi : : \bar{\psi} \hat{O}^j \mathcal{B}^T \bar{\psi}^T \dots$$

Nach den Feynmanregeln bedeutet das - man beachte, daß es zwei Möglichkeiten der Kontraktion gibt -

$$(2.68) \quad -2i\sqrt{g_i}\sqrt{g_j} \operatorname{Sp}(\mathcal{B}\hat{\mathcal{O}}^i S_F(x-y) \hat{\mathcal{O}}^j \mathcal{B}^T S_F^T(x-y)) = \\ = -2i\sqrt{g_i}\sqrt{g_j} \operatorname{Sp}(\hat{\mathcal{O}}^i S_F(x-y) \hat{\mathcal{O}}^j S_F(x-y)).$$

Diese Form unterscheidet sich noch von den Graphen in Stromdarstellung, weil in den Propagatoren die gleichen Argumente stehen. Wir setzen den Feynmanpropagator

$$(2.69) \quad S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

ein und führen die Ortsraumintegrationen aus. Dazu ma-

chen wir für die Kette  die Variab-

lentransformation

$$(2.70) \quad x := x_1 + x_n, \quad z_1 := x_1 - x_2, \dots, z_{n-1} := x_{n-1} - x_n$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + \sum z_i), \quad x_n = \frac{1}{2}(x - \sum z_i).$$

Von den äußeren Linien, die Impulseigenzustände sind, kommen Faktoren

$$(2.71) \quad e^{iq \cdot x}, \quad e^{-iq' \cdot x_n},$$

wobei wegen der Impulserhaltung (x -Integration) $q=q'$ gilt. Zu unserer Schleife Gl. (2.68) gehört die Integration über $z:=x-y$ und wir erhalten wegen (2.70) und (2.71)

$$(2.72) \quad \int d^4 z \hat{\mathcal{O}}^i S_F(z) \hat{\mathcal{O}}^j S_F(z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\mathcal{O}}^i \frac{\not{p}' + m}{p'^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\mathcal{O}}^j \\ \times \int d^4 z e^{-i(p+p') \cdot z} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\mathcal{O}}^i \frac{\not{p} - \not{p} + m}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\mathcal{O}}^j.$$

Machen wir noch die Substitution $p \rightarrow p+k$ ($q=2k$) und fügen wir in die Spur $1 = \gamma_5 \gamma_5$ ein, so sind wir bei der gewünschten Form angelangt

$$(2.73) \quad \pm (-2i\sqrt{g_i}\sqrt{g_j}) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Sp}((\not{p} + \not{k}) \hat{\mathcal{O}}^i \gamma_5 (\not{p} - \not{k} + m) \hat{\mathcal{O}}^j \gamma_5)}{((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)}.$$

wir sehen, daß bei den Schleifenintegralen, die wir mit $\hat{\Pi}$ bezeichnen wollen, gegenüber dem Teilchen-Antiteilchen-Kanal die Größen mit den Pseudogrößen vertauscht sind.

Das Vorzeichen richtet sich nach der Matrix $\hat{O}^i$, ob sie mit γ_5 kommutiert oder antikommutiert. Für den Teilchen-Teilchen-Kanal haben wir demnach das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^S(q^1) &= \pi^P(q^1) \quad , \quad \hat{\pi}^P(q^2) = \pi^S(q^2) \quad , \\ (2.74) \quad \hat{\pi}^{V\mu\nu}(q) &= -\pi^{A\mu\nu}(q) \quad , \\ \hat{\pi}^{V\mu\nu}(q) &= \pi^{A\mu\nu}(q) \quad , \quad \hat{\pi}^{SV\nu}(q) = +\hat{\pi}^{SV\nu}(q) \quad . \end{aligned}$$

Die Diskussion ist jetzt völlig analog zum Teilchen-Antiteilchen-Fall. Wir entnehmen aus (2.67) und (1.51), daß sich ein gebundener Zustand nur für den Pseudoskalar ergibt, dessen Pol durch die Aufsummation von $\hat{\pi}^P = \pi^S$ an der Stelle des skalaren Bindungszustands des Teilchen-Antiteilchen-Systems zu liegen kommt. Ein skalares Teilchen ist wegen des verschiedenen Vorzeichens von $\hat{S} \times \hat{S}$ in (2.67) und $P \times P$ in (1.51) nicht möglich; ebenso gibt es kein Vektorteilchen, welches einem Deuteron entsprechen würde.

3. Integration der Vakuumpolarisation im Gitterraum

3.1 Direkte Berechnung im Fall kleiner Impulse

Im Gitterraum werden die räumlichen Impulse durch

$$(3.1) \quad p_j = \frac{\sqrt{2}}{l} \sin \frac{2\pi h_j}{2} \equiv \sqrt{2\Lambda^2} \sin f_j, \quad \Lambda \equiv \sqrt{\frac{2}{a^2}}$$

dargestellt [1]. Wir setzen fest, daß f_j auf dem Kubus $-\frac{\pi}{2} \leq f_j \leq \frac{\pi}{2}$ definiert ist und periodische Randbedingungen gelten sollen. Die räumlichen Integrationen erstrecken sich über diesen Würfel, wodurch die Integrale endlich werden. Für die Berechnung der Vakuumpolarisation machen wir uns die Zerlegung aus Abschnitt 2.1 zunutze und stellen fest, daß wir die konvergenten Integrale übernehmen können, da in ihnen der cutoff nicht vorkommt. Wir müssen nurmehr die divergenten Integrale neu berechnen. Wenden wir uns dem Integral

$$(3.2) \quad J(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

zu, aus dem wir $J_i(0)$ Gl. (2.3) durch Differenzieren nach m^2 erhalten. Nach der Ersetzungsregel [7] ((1.3) und Einleitung)

$$(3.3) \quad \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{a^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 f = 2\sqrt{2} \Lambda^3 \int \frac{d^3 f}{(2\pi)^3}$$

bekommen wir die Gitterraumgestalt dieses Feynmanintegrals:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} J(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{\sqrt{2}\Lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3 f \frac{1}{p_0^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2 f_i - m^2 + i\epsilon} \\ &= -i \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{\sqrt{2}\Lambda^3}{(2\pi)^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3 f e^{i\lambda(p_0^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2 f_i - m^2 + i\epsilon)} \end{aligned}$$

Die p_0 -Integration läßt sich nun direkt ausführen und gibt einen Faktor

$$(3.5) \quad \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}}$$

Wir benützen ferner die Formel $\sin^2 j = \frac{1}{2} (1 - \cos 2j)$ und setzen

$$(3.6) \quad t = 2j$$

Das ergibt die Gestalt

$$(3.7) \quad J(0) = \frac{-ie^{i\pi/4}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Lambda^3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\lambda(m^2 + 3\Lambda^2 - i\varepsilon)} \left(\int_0^\pi dt e^{i\lambda \Lambda^2 \cos t} \right)^3$$

Das t -Integral kann ausgeführt werden und gibt eine Besselfunktion [21]

$$(3.8) \quad \int_0^\pi dt e^{i\lambda \Lambda^2 \cos t} = \pi J_0(\lambda \Lambda^2)$$

Substituieren wir noch

$$(3.9) \quad \lambda \Lambda^2 = -i z^2$$

und beachten wir, daß

$$(3.10) \quad J_0(-iz^2) = I_0(z^2)$$

die modifizierte Besselfunktion ist, so haben wir das Ergebnis nach einer Verschiebung des Integrationswegs auf die reelle Achse

$$(3.11) \quad J(0) = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \Lambda^3 \int_0^\infty dz I_0^3(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

Die quadratische Divergenz steht schon explizit vor dem Integral. Die verbleibende Integration läßt sich nicht mehr elementar durchführen und wird numerisch auf einer Rechenmaschine ausgewertet.

Für die beiden Integrale $J_2^{\mu\nu}(0)$ (2.5) und $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$ (2.7) verwenden wir die Formel

$$(3.12) \quad (b + i\varepsilon)^{-n} = \frac{(-i)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{n-1} e^{i\lambda(b+i\varepsilon)}$$

um den Nenner in den Exponenten zu heben. Bei $J_2^{\mu\nu}(0)$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Erstens $\mu = \nu = 0$

$$(3.13) \quad J_2^{00}(0) = - \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{d\rho}{2\pi} \rho^2 \frac{g\sqrt{\Lambda^2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\beta e^{i\lambda(\rho^2 - 2\Lambda^2 \sin^2 \beta; -m^2 + i\varepsilon)}$$

Die p -Integration gibt jetzt

$$(3.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d p_0}{2\pi} p_0^2 e^{i \lambda p_0^2} = \frac{i g_0}{2\lambda} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}},$$

sodaß wir aus (3.4) entnehmen können, daß

$$(3.15) \quad J_2^{00}(0) = \frac{1}{2} J(0)$$

ist. Im Falle, daß $\mu = \nu = i$ eine Raumkomponente ist, setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $i=1$

$$(3.16) \quad J_2^{11}(0) = -\frac{2\sqrt{2}\Lambda^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda \lambda}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\lambda m^2} \times \\ \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \{ 2\Lambda^2 \sin^2 \theta \} e^{-i\lambda 2\Lambda^2 \sin^2 \theta} (\pi J_0(\lambda\Lambda^2) e^{-i\lambda\Lambda^2})^2.$$

Die θ -Integration bereitet keine Schwierigkeit [21]

$$(3.17) \quad 2\Lambda^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta e^{-i\lambda 2\Lambda^2 \sin^2 \theta} = i \frac{d}{d\lambda} \pi J_0(\lambda\Lambda^2) e^{-i\lambda\Lambda^2} \\ = -i\pi\Lambda^2 (J_1(\lambda\Lambda^2) + iJ_0(\lambda\Lambda^2)) e^{-i\lambda\Lambda^2}.$$

Wenn wir wieder die Substitution (3.9) machen - $J_1(-iz^2) = -iJ_1(z^2)$ -, bekommen wir

$$(3.18) \quad J_2^{11}(0) = \frac{-ig_0}{4\sqrt{2\pi}} \Lambda^2 \int_0^{\infty} dz z^2 (I_0(z^2) - I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

Wenn $\mu \neq \nu$ ist, ergibt das Integral Null, weil der Integrand eine ungerade Funktion ist. Ebenso müssen in $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$ je zwei Indizes gleich sein, sonst verschwindet das Integral. Wenn diese beiden Indexpaare verschieden sind, können wir wie für $J_2^{\mu\nu}(0)$ die Beziehungen (3.14) und (3.17) einsetzen.

$$(3.19) \quad J_6^{00ii}(0) = \frac{\sqrt{2}\Lambda^3}{6(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d p_0}{2\pi} p_0^2 \int d^3j \{ 2\Lambda^2 \sin^2 \theta \} e^{i\lambda(p_0 - 2\Lambda^2 \sum_j p_j^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ = \frac{ig_0 g_{ii}}{24\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dz z^4 (I_0(z^2) - I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

$$\begin{aligned}
 J_6^{ijij}(0) &= \frac{\sqrt{P} \Lambda^3}{6(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^3 \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3j (2\Lambda^2 \sin^2 j) (2\Lambda^2 \sin^2 j) e^{i\lambda(\Lambda^2 - 2\Lambda^2 \sum_j \sin^2 j - m^2 \epsilon)} \\
 (3.20) \quad &= \frac{i 2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{16 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^6 (I_0(z^2) - I_4(z^2))^2 I_0(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})} \quad \begin{matrix} i, j \neq 0 \\ i \neq j \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Der Faktor Λ^2 vor dem Integral tritt nicht mehr auf, weil im λ -Integral (vgl. (3.13)) jetzt λ^3 steht, was bei der Substitution (3.9) einen Faktor Λ^6 liefert, der die anderen Λ -Potenzen kompensiert. Sind alle Indizes gleich Null, so brauchen wir das Integral

$$(3.21) \quad \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\rho_0}{2\pi} \rho_0^4 e^{i\lambda \rho_0^2} = - \frac{3g_0 \cdot g_0}{4\lambda^2} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}},$$

das wir durch Differenzieren von (3.14) berechnen.

$$\begin{aligned}
 J_6^{0000}(0) &= \frac{\sqrt{P} \Lambda^3}{6(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^3 \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3j e^{i\lambda(\Lambda^2 - 2\Lambda^2 \sum_j \sin^2 j - m^2 \epsilon)} \\
 (3.22) \quad &= \frac{i 2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{16 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^4 I_0^3(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})}.
 \end{aligned}$$

Sind in (3.20) alle Indizes gleich, so müssen wir (3.17) nochmals differenzieren

$$\begin{aligned}
 (2\Lambda^2)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3j \sin^4 j e^{-i\lambda \Lambda^2 \sum_j \sin^2 j} &= \left(i \frac{d}{d\lambda}\right)^2 \pi J_0(\lambda \Lambda^2) e^{-i\lambda \Lambda^2} \\
 (3.23) \quad &= \pi \Lambda^4 (2J_0(\lambda \Lambda^2) - (2i + \frac{2}{\lambda \Lambda^2}) J_1(\lambda \Lambda^2)) e^{-i\lambda \Lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 J_6^{iiii}(0) &= \frac{\sqrt{P} \Lambda^3}{6(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^3 \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3j (2\Lambda^2 \sin^2 j)^2 e^{i\lambda(\Lambda^2 - 2\Lambda^2 \sum_j \sin^2 j - m^2 \epsilon)} \\
 (3.24) \quad &= \frac{i 2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{16 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^4 (2z^2 I_0(z^2) - (2z^2 + 1) I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})}.
 \end{aligned}$$

Wir haben jetzt alle benötigten Integrale auf eine einfache Gestalt gebracht, die für eine numerische Auswertung geeignet ist. Die weiteren Einzelheiten der Rechnung werden im Anhang III ausgeführt. Wir stellen noch fest, daß $J_6^{m^2 m^2}$ divergiert, obwohl keine Λ^2 -Potenz mehr vor dem Integral steht. Um das einzusehen, genügt es, die asymptotische Entwicklung der Besselfunktionen

$$(3.25) \quad I_{0,1}(z^2) \sim \frac{e^{z^2}}{\sqrt{z^2} \sqrt{z^2}} (1 + O(\frac{1}{z^2}))$$

einsetzen; das ergibt in (3.22) für $\Lambda \rightarrow \infty$ einen Abfall $\sim \frac{1}{z^2}$ des Integranden bei $z \rightarrow \infty$ und führt zur logarithmischen Divergenz. Das Endergebnis im Fall kleiner Impulse lautet entsprechend zu (2.8)

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \Pi^4(q, q) &= \frac{1}{4\pi^2} [-2K_1 \Lambda^2 + (3m^2 - 2k^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + (6K_2 + 2)m^2 \\ &\quad - (6K_2 - 2K_4 + 2)k^2 - 4(m^2 - k^2)\ell_1 + 2(K_2 - K_4)k_0^2] \\ \Pi^2(q, q) &= \frac{1}{4\pi^2} [2K_1 \Lambda^2 - (m^2 - 2k^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 2K_2 m^2 \\ &\quad + (6K_2 - 2K_4 + 2)k^2 - 4k^2\ell_1 - 2(K_2 - K_4)k_0^2] \\ \Pi^{\mu\nu}(q, q) &= \frac{1}{4\pi^2} [(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) (\frac{4}{3} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{4}{3} m^2 + 2(2K_2 + \frac{1}{3})k^2 \\ &\quad - \frac{4}{3}(m^2 + 2k^2)\ell_1 + g^{\mu\nu}(4K_2 - \frac{4}{3}K_4 - \frac{4}{3})k^2 + \frac{2}{3}F^{\mu\nu\kappa\lambda}k_\kappa k_\lambda \\ &\quad - (g^{\mu\nu} - \delta^{\mu\nu}) (2(K_2 - K_3)\Lambda^2 - 2(K_2 - K_4)(m^2 - k^2) + 2(2K_5 - 2K_4 + 1)k^2)]. \end{aligned}$$

Die konstanten K_i und der Tensor 4. Stufe $F^{\mu\nu\kappa\lambda}$ stammen aus den ohne Abschneidung divergenten Integralen und sind im Anhang IV definiert.

$$\begin{aligned} K_1 &= 1.98813 & K_2 &= 1.90940 \\ K_3 &= 2.99604 & K_4 &= 1.57606 \\ K_5 &= 0.27558 & K_6 &= 0.54383 \end{aligned}$$

$$(3.27) \quad F^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 96} \left\{ \begin{array}{ll} 3(2K_2 - 1) & \mu=\nu=\kappa=\lambda=0 \\ 8K_6 & \mu=\nu=\kappa=\lambda \neq 0 \\ 2K_4 - 1 & \mu=\nu=0, \kappa=\lambda \neq 0 \\ & \text{und Permutationen} \\ 8K_5 & \mu=\nu=i, \kappa=\lambda=j, i \neq j; i, j \neq 0 \\ & \text{und Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$$

Die logarithmischen Divergenzen sind ebenso wie die konvergenten Integrale die gleichen wie in (2.8).

Die Vakuumpolarisation zeigt durch das explizite Auftreten von Termen $\sim k_0^2$ bzw. $\sim \underline{k}^2$, daß die Lorentzinva-

rianz verletzt ist. Besonders ins Auge springend ist die Verletzung im $\Pi^{\mu\nu}$ -Tensor, weil die quadratische Divergenz nur im räumlichen Anteil vorkommt. Überdies ist nicht einmal die Rotationsinvarianz gewahrt, wie wir am Tensor 4. Stufe $F^{\mu\nu\kappa\lambda}$ sehen: er müßte sonst bezüglich aller Indizes symmetrisch sein. An diesem Sachverhalt würde auch der Grenzübergang $\Lambda \rightarrow \infty$ nichts ändern, da die betreffenden Konstanten K_1 (3.27) nicht von Λ abhängen. Obwohl wir hier erst eine einfache Näherung zur exakten Struktur unserer Theorie haben, besteht nur eine geringe Hoffnung, daß höhere Näherungen die vorliegenden Ergebnisse aufheben werden. Wie die Renormierungstheorie lehrt [42], sind in höheren Näherungen sogar noch weitere nichtkovariante Terme zu erwarten. Wir sind daher gezwungen, den Gitterraum als Modell einer relativistischen Feldtheorie aufzugeben. Nichtsdestoweniger kann aber auch ein derartiges Festkörpermodell der Elementarteilchen wichtige Einsichten in eine relativistische Feldtheorie vermitteln [43].

3.2 Die Diskontinuität für $q = 0$

Bei großen Energien und Impulsen können wir wieder versuchen, uns mit der Diskontinuitätsformel (2.9) eine Aussage über die Spektralfunktion zu verschaffen. Da die Cutkosky-Formel ganz allgemein für Nullstellen von Nennern im Integranden abgeleitet wird, dürfen wir (2.9) auch anwenden, wenn die Impulse mit (3.1) gegeben sind. Wir berechnen als Beispiel $\Pi^j(q, q)$ und benutzen das $\Pi^j(q^4)$ von (1.54), aber jetzt in der Gitterraumdarstellung, für die Diskontinuitätsformel.

$$\begin{aligned} \text{disk } \Pi^j(q_0, q) &= \frac{-i}{a^3(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^3\zeta \theta(k_0 + \rho_0) \theta(k_0 - \rho_0) \times \\ (3.28) \quad &\times \delta((k_0 + \rho_0)^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2(\zeta_i + \eta_i) - m^2) \delta((k_0 - \rho_0)^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2(\zeta_i - \eta_i) - m^2) \\ &\times (-4i) (m^2 - k_0^2 + \rho_0^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin(\zeta_i + \eta_i) \sin(\zeta_i - \eta_i)), \end{aligned}$$

wobei wir

$$(3.29) \quad k_i^2 = : 2\Lambda^2 \sin^2 \eta_i$$

gesetzt haben. Der letzte Faktor im Integranden kommt von der Spur in (1.53) und erhält wegen

$$(3.30) \quad (p+k) \cdot (p-k) \rightarrow p_0^2 - k_0^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin(\xi_i + \eta_i) \sin(\xi_i - \eta_i)$$

beim Übergang zum Gitterraum seine Gestalt von (3.28). Im Schwerpunktsystem hat (3.28) eine verhältnismäßig einfache Form, weil dann $\underline{k}_i = \eta_i = 0$ wird und wir auf die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verzichten können.

$$(3.31) \quad \text{disk } \Pi^S(q, \underline{l}) = \frac{-4}{a^3(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^3\xi \quad \theta(k_0 + p_0) \theta(k_0 - p_0) \times \\ \times \delta((k_0 + p_0)^2 - m^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2 \xi_i) \delta((k_0 - p_0)^2 - m^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2 \xi_i) \times \\ \times (m^2 + p_0^2 - k_0^2 - 2\Lambda^2 \sum_i \sin^2 \xi_i).$$

Wir führen zuerst die ξ_i -Integration aus. Das Argument der ersten δ -Funktion hat eine Nullstelle bei

$$(3.32) \quad 2\Lambda^2 \sin^2 \xi_0 = (k_0 + p_0)^2 - m^2 - 2\Lambda^2 (\sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3),$$

die Ableitung des Arguments ist

$$(3.33) \quad 4\Lambda^2 \sin \xi_0 \cos \xi_0 = 4\Lambda^4 \sqrt{\frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} - \sin^2 \xi_2 - \sin^2 \xi_3} \sqrt{1 - \frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} + \sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3}$$

sodaß sich ergibt

$$(3.34) \quad \text{disk } \Pi^S(q, \underline{l}) = \frac{-4}{a^3(2\pi)^3 4\Lambda^4} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^3\xi \quad \theta(k_0 + p_0) \theta(k_0 - p_0) \times \\ \times \frac{\theta\left(\frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} - \sin^2 \xi_2 - \sin^2 \xi_3\right) \theta\left(1 - \frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} + \sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3\right)}{\sqrt{\frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} - \sin^2 \xi_2 - \sin^2 \xi_3} \sqrt{1 - \frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2} + \sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3}} \\ \times \delta(-4 k_0 p_0) (2m^2 - 2k_0^2 - 2k_0 p_0).$$

Die beiden neuen θ -Funktionen sind der Ausdruck dafür, daß der $\sin^2 \xi_0$ in (3.32) durch Null und Eins beschränkt ist. Wir sehen aus der δ -Funktion, daß $p_0 = 0$, so daß die ersten beiden θ -Funktionen erfüllt sind, da wir $k_0 > 0$ haben. Wir integrieren über p_0 und erhalten

$$(3.35) \quad \text{disk } \Pi^S(q, \underline{l}) = \frac{1}{a^3(2\pi)^3} \frac{k_0^2 - m^2}{k_0} \frac{1}{2\Lambda^4} \times \\ \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^3\xi \quad \frac{\theta\left(\frac{k_0^2 - m^2}{2\Lambda^2} - \sin^2 \xi_2 - \sin^2 \xi_3\right) \theta\left(1 - \frac{k_0^2 - m^2}{2\Lambda^2} + \sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3\right)}{\sqrt{\frac{k_0^2 - m^2}{2\Lambda^2} - \sin^2 \xi_2 - \sin^2 \xi_3} \sqrt{1 - \frac{k_0^2 - m^2}{2\Lambda^2} + \sin^2 \xi_2 + \sin^2 \xi_3}}$$

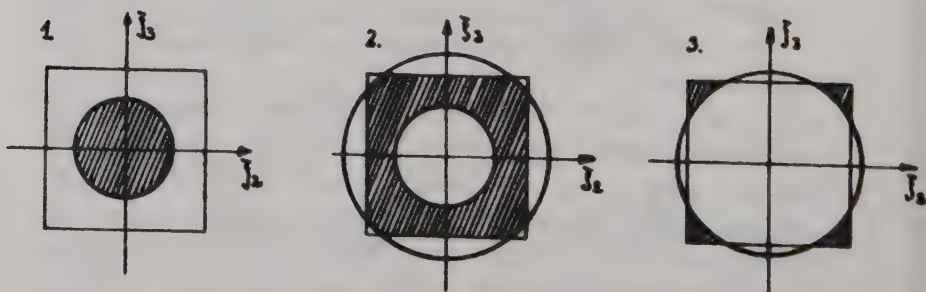
Um einen handlichen Ausdruck zu bekommen, definieren wir

$$(3.36) \quad K^2 := \frac{k_0^2 - m^2}{2\Lambda^2}$$

Damit schreibt sich (3.35)

$$(3.37) \quad \text{dick} \Pi^S(q_0, 0) = \frac{2\Lambda^2}{(2\pi)^2} \frac{K^2}{\sqrt{K^2 - \frac{m^2}{2\Lambda^2}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\theta(K^2 - \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_3) \theta(1 - K^2 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3)}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_3} \sqrt{1 - K^2 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3}}.$$

Je nach der Größe von K haben wir drei verschiedene Typen von Integrationsgebieten. Zunächst wird über das Quadrat in der $\varphi_2 - \varphi_3$ -Ebene mit der Kantenlänge π integriert. Die θ -Funktionen bedingen aber noch zusätzliche Beschränkungen. 1. Fall: Ist $0 \leq K^2 \leq 1$, so ist die zweite θ -Funktion immer erfüllt, aber die erste schneidet aus dem Quadrat einen Kreis aus. 2. Fall: Ist $1 \leq K^2 \leq 2$, so liegt die Kreisbegrenzung der ersten θ -Funktion nicht mehr ganz innerhalb des Quadrats und nur der Durchschnitt beider enthält das Integrationsgebiet. Gleichzeitig ist eine zweite Begrenzung durch die zweite θ -Funktion entstanden, die das Innere des kleineren Kreises ausschließt. 3. Fall: Ist $2 \leq K^2 \leq 3$, so läßt der innere Kreis vom Integrationsgebiet nur mehr die Ecken des Quadrats übrig.



Im ersten Fall gehen wir zweckmäßig zu Polarkoordinaten über und substituieren zunächst

$$(3.38) \quad \sin \varphi_2 = x, \quad \sin \varphi_3 = y, \quad d\varphi_2 = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\varphi_3 = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

und dann

$$(3.39) \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad dx dy = \varrho d\varrho d\varphi$$

und erhalten

$$(3.40) \quad \text{disk } \Pi^S(q_0, 0) = 4 \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^2} \frac{K^2}{\sqrt{K^2 - \frac{m^2}{2\lambda^2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{1 - \varrho^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \varrho^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{K^2 - \varrho^2} \sqrt{1 - K^2 + \varrho^2}}$$

Um die Winkelintegrationen zu bewerkstelligen, multiplizieren wir den Nenner aus und substituieren $2\varphi \rightarrow \varphi$

$$(3.41) \quad F(\varrho^2) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varrho^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \varrho^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{\varrho^4}{4(1 - \varrho^2)} \sin^2 \varphi}}.$$

Dies ist eine analytische Fortsetzung des elliptischen Integrals 1. Art, das wir als hypergeometrische Funktion schreiben.

$$(3.42) \quad F(\varrho^2) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -\frac{\varrho^4}{4(1 - \varrho^2)}\right)$$

Die hypergeometrische Reihe konvergiert nur innerhalb des Einheitskreises, weshalb unsere Darstellung noch nicht geeignet ist. Wir benützen die Transformationsformel [21]

$$(3.43) \quad {}_2F_1\left(a, b; \frac{a+b+1}{2}, z\right) = (1-2z)^{-a} {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; \frac{a+b+1}{2}, \frac{4z(1-z)}{(1-2z)^2}\right)$$

und gelangen zu

$$(3.44) \quad F(\varrho^2) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho^2 + \varrho^2/2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1, \frac{\varrho^4(1 - \varrho^2 + \varrho^2/2)}{(1 - \varrho^2 + \varrho^2/2)^2}\right).$$

Setzen wir noch

$$(3.45) \quad \varrho^2 = 1 - u^2,$$

erhalten wir schließlich

$$(3.46) \quad F(1 - u^2) = \frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{1 + u^2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1, \left(\frac{1 - u^4}{1 + u^4}\right)^2\right).$$

Das Argument der hypergeometrischen Funktion ist jetzt tatsächlich durch 1 beschränkt und symmetrisch um $u=0$ bzw. $\varrho=1$. In (3.40) substituieren wir noch einmal

$$(3.47) \quad \sin \varphi := \sqrt{K^2 - \varrho^2}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - K^2 + \varrho^2}, \quad \varrho^2 = K^2 - \sin^2 \varphi$$

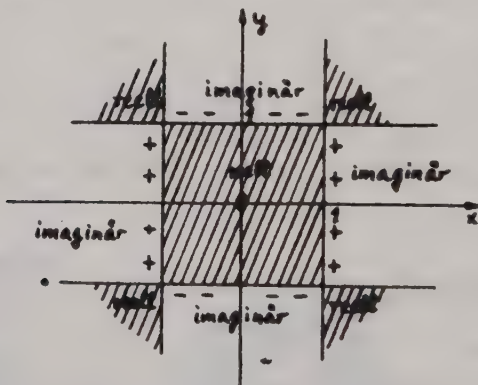
und setzen $F(\varrho)$ ein. Damit haben wir die endgültige Gestalt unseres Integrals für die Diskontinuität:

$$(3.48) \quad \text{disk } \Pi^S(q_0, 0) = \frac{8\Lambda^2}{(2\pi)^2} \frac{K^2}{\sqrt{K^2 - \frac{m^2}{\Lambda^2}}} \int_0^{\arcsin K} d\psi \, F(K^2 - \sin^2 \psi), \quad 0 \leq K^2 \leq 1$$

Es bleiben noch die Fälle 2. und 3. mit ihren komplizierteren Integrationsgrenzen, wir stellen aber fest, daß eine der Wurzeln im Nenner von (3.41) imaginär wird, wenn wir über den Rand des Einheitsquadrats hinausintegrieren. Die Verzweigungslinien des Integranden sind durch die Geraden

$$(3.49) \quad \varrho \cos \varphi = \pm 1, \quad \varrho \sin \varphi = \pm 1$$

gegeben. Wenn wir also eine Fortsetzung von $F(\varrho^2)$ für $\varrho^2 > 1$ suchen, die den Vorzeichen der Wurzeln in der Zeichnung entspricht, heben sich wegen der Symmetrie des Integranden die Imaginärteile

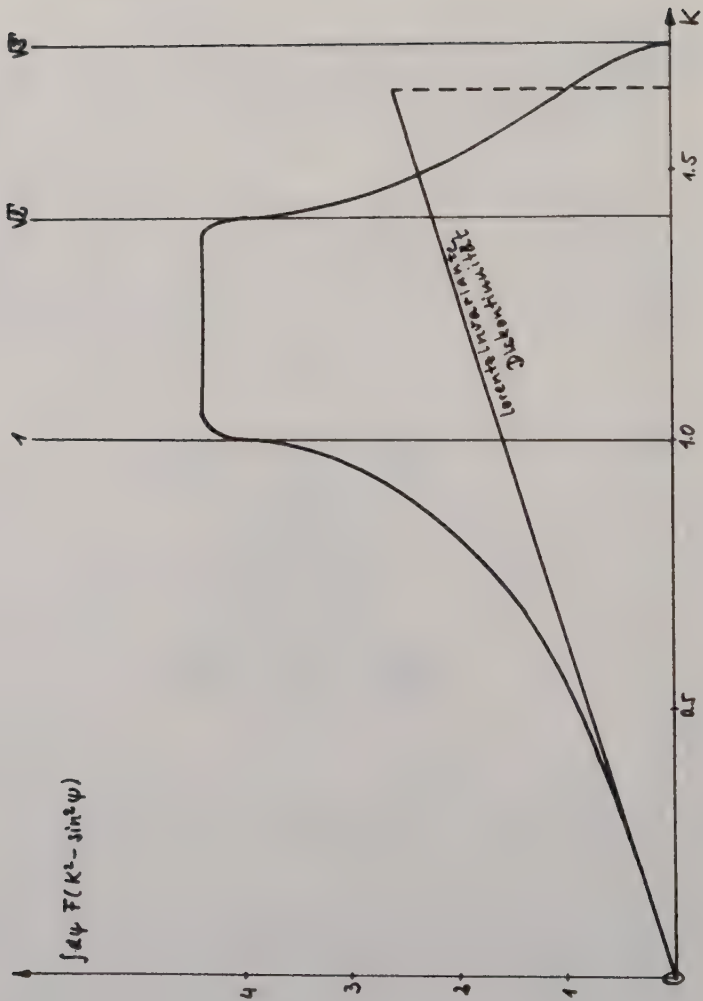


fort. Wir dürfen über den vollen Kreisring integrieren und die Gebiete außerhalb des Quadrats fallen von selbst weg. Die gesuchte Funktion ist tatsächlich (3.46), da die hypergeometrische Funktion für alle κ außer $\kappa=0$ konvergiert. An der Stelle $\kappa=0$ hat sie nur eine logarithmische Singularität und bringt für die Integration über $\kappa=0$ hinweg keine Schwierigkeiten. Wir können also für die Fälle 2. und 3. schreiben:

$$(3.50) \quad \text{disk } \pi^S(q_0, \underline{0}) = \frac{g\Lambda^2}{(2\pi)^2} \frac{K^2}{\sqrt{K^2 - \frac{m^2}{2\Lambda^2}}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{\arcsin \sqrt{K^2-2}}^{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right\} d\psi F(K^2 - \sin^2 \psi)$$

$1 \leq K^2 \leq 2$
 $2 \leq K^2 \leq 3$

Die drei Integrale (3.48) und (3.50) lassen sich numerisch auswerten. Das Resultat ohne den Faktor vor dem Integral ist in der Abbildung aufgetragen. Zum Vergleich wurde die entsprechende Diskontinuität für den lorentz-invarianten cutoff eingezeichnet. Die erhaltene Funktion ist analytisch, was aus der Analytizität des Integranden folgt. Bei $K=1$ und $K=\sqrt{2}$ hat sie jeweils senkrechte Tangenten und Verzweigungspunkte. Das Plateau im mittleren Bereich weist ein flaches Minimum auf. Außerhalb von $0 \leq K \leq \sqrt{3}$ verschwindet die Spektralfunktion identisch.



3.3 Diskussion für $q \neq 0$

Bevor wir unsere Diskussion weiterführen, müssen wir präzisieren, was wir unter periodischen Randbedingungen verstehen wollen. Wir erreichten die Gitterung des Ortsraumes, indem wir die Vektoren h_i des Fourier-raumes auf einen Kubus beschränkten und diesen Kubus periodisch fortgesetzt dachten, so daß alle Funktionen f der h_i oder nach (3.1) der ξ_i periodisch mit dem Kubus als Periodizitätsintervall eingeführt wurden. Die Periodizitätsbedingung setzen wir nun folgendermaßen fest

$$(3.51) \quad f(\xi_i + m_i \pi) = (-1)^{m_1+m_2+m_3} f(\xi_i), \quad m_i \text{ ganz}$$

In diesem Sinne ist der Impuls p in (3.1) im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ periodisch, obwohl der Sinus die doppelte Periode hat. Wir lassen also die physikalischen Impulse beim Maximalwert des Sinus abbrechen, und haben trotzdem erreicht, daß alle unsere Funktionen in diesem periodischen Raum analytisch sind, wie es für die Untersuchung der Struktur der Gitterraumdynamik wünschenswert ist.

Im Fall, daß $q \neq 0$ ist, wird sich ein ähnliches Bild für die Spektralfunktion wie bei $q=0$ ergeben und das Spektrum wird ebenfalls bei einem endlichen Wert aufhören. Das folgt, wenn man die δ -Funktionen in (3.28) betrachtet. Wegen der Beschränktheit des Sinus müssen $(k_0+p_0)^2$ und $(k_0-p_0)^2$ beschränkt sein, was bedeutet, daß auch k_0 und p_0 beschränkt sind.

Zunächst schätzen wir das Verhalten der Spektralfunktion für kleine Impulse ab. Dabei legen wir unseren Impuls in die ξ_2 -Richtung, d.h. $\eta_2 \neq 0$, $\eta_1 = \eta_3 = 0$. η_2 soll so klein sein, daß wir den Sinus durch sein Argument ersetzen und $\cos \eta_2 = 1$ setzen dürfen. Die $\int_1$ -Integration ergibt jetzt wegen

$$(3.52) \quad 2\Lambda^2 \sin^2 \xi_1 = (k_0 + p_0)^2 - m^2 - 2\Lambda^2 (\sin^2(\xi_1 + \eta_2) + \sin^2 \xi_2)$$

in der zweiten δ -Funktion das Argument

$$(3.53) \quad -4k_0 p_0 + 2\Lambda^2 (\sin^2(\beta_2 + \gamma_2) - \sin^2(\beta_2 - \gamma_2)) = -4k_0 p_0 + 4\Lambda^2 \eta_2 \cos \beta_2 \sin \beta_2.$$

Das führt bei der p_0 -Integration zu

$$(3.54) \quad p_0 = 2\Lambda^2 \frac{\eta_2}{k_0} \cos \beta_2 \sin \beta_2$$

Da (3.52) größer als Null sein muß, erhalten wir wieder eine Grenzkurve für unser Integrationsgebiet

$$(3.55) \quad \sin^2(\beta_2 + \gamma_2) + \sin^2 \beta_2 \leq \frac{(k_0 + p_0)^2 - m^2}{2\Lambda^2}$$

Wir setzen (3.54) ein und erhalten mit $\sin \beta_2 = x$, $\sin \beta_3 = y$

$$(3.56) \quad k_0^2 - m^2 - 2\Lambda^2 \eta_2^2 + \frac{4\Lambda^4}{k_0^2} \eta_2^2 x^2 (1-x^2) - 2\Lambda^2 (x^2 + y^2) \geq 0.$$

Wegen der θ -Funktionen in (3.28) gilt

$$(3.57) \quad k_0^2 \geq \frac{4\Lambda^4}{k_0^2} \eta_2^2 x^2 (1-x^2).$$

Da $\underline{k}^2 = 2\Lambda^2 \eta_2^2$ ist, heißt das, daß

$$(3.58) \quad \frac{k_0^4}{2\Lambda^2 \underline{k}^2} \geq x^2 (1-x^2),$$

also für kleine k_0 auch x^2 klein sein muß, so daß wir x^2 neben 1 vernachlässigen dürfen. (3.56) wird dann

$$(3.59) \quad \frac{k_0^2 - m^2 - \underline{k}^2}{2\Lambda^2} - x^2 (1 - \frac{\underline{k}^2}{k_0^2}) - y^2 \geq 0.$$

Für welche Werte von k existiert ein solches Integrationsgebiet? Unterhalb der Schwelle wird

$$(3.60) \quad k_0^2 \leq m^2 + \underline{k}^2.$$

Dies eingesetzt in (3.57) gibt

$$(3.61) \quad (m^2 + \underline{k}^2)^2 \geq 2\Lambda^2 \underline{k}^2 x^2$$

und daraus folgt

$$(3.62) \quad x^2 \leq \frac{(m^2 + \underline{k}^2)^2}{2\Lambda^2 \underline{k}^2} = \eta_2^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)$$

Dies setzen wir wieder in (3.57) ein und erhalten

$$(3.63) \quad k_0^4 \geq 4\Lambda^4 \eta_2^2 (\eta_2^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)) = \underline{k}^4 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),$$

so daß k_0^2 allenfalls im Intervall $(\underline{k}^2, \underline{k}^2 + m^2)$ liegen kann ((3.60) und (3.63)). In diesem Intervall ist aber die linke Seite von (3.59) negativ definit. Es muß daher k_0^2 größer als $\underline{k}^2 + m^2$ sein und (3.59) beschreibt eine Ellipse, die entsteht, wenn wir mit k_0 über die Schwelle kommen, und die das Integrationsgebiet für das Diskontinuitätsintegral umschließt. Das Spektrum beginnt also wie im lorentzinvarianten Fall bei $k_0 = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2}$

Bei der Diskussion der großen räumlichen Impulse beschränken wir uns auf den Fall $q_2 = \frac{\pi}{4}, q_1 = q_3 = 0$. Dies ist der maximale Impuls in der (0,1,0)-Richtung. Denn es gilt zwar $q_{\max} = 2\Lambda^2 \sin \frac{\pi}{2}$, aber wir haben in unseren Integrationen den Vektor $\underline{k}$ eingeführt, der im lorentzinvarianten Fall gleich $q/2$ war. Das bedeutet auf den Gitterraum übertragen

$$(3.64) \quad q_1 = 2 q_2, \quad q_{2 \max} = \frac{\pi}{4}$$

In der Diskontinuitätsformel (3.28) führen wir $\sin(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{2})$ ein

$$(3.65) \quad \begin{aligned} \text{disk } \Pi^i(q_0, q_{\max}) = & - \frac{4i}{\alpha^2 (2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3 \underline{k} \left\{ \theta(k_0 + p_0) \theta(k_0 - p_0) \times \right. \\ & \times \delta((k_0 + p_0)^2 - 2\Lambda^2(\sin^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{2})^2 + \sin^2 \frac{1}{2}) - m^2) \times \\ & \times \delta((k_0 - p_0)^2 - 2\Lambda^2(\sin^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2})^2 + \sin^2 \frac{1}{2}) - m^2) \times \\ & \left. \times (m^2 + p_0^2 - k_0^2 - 2\Lambda^2(\sin^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin^2 \frac{1}{2} - \cos^2 \frac{1}{2}) + \sin^2 \frac{1}{2})) \right\} \end{aligned}$$

Die $\int_1$ -Integration führt zu

$$(3.66) \quad 2\Lambda^2 \geq 2\Lambda^2 \sin^2 \frac{1}{2} = (k_0 + p_0)^2 - 2\Lambda^2 \left(\frac{1}{2} (\sin \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{2})^2 + \sin^2 \frac{1}{2} \right) \geq 0,$$

wodurch das Argument der zweiten δ -Funktion gleich $-4k_0 p_0 + 2\Lambda^2 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$ wird, woraus wiederum folgt, daß

$$(3.67) \quad p_0 = \frac{\Lambda^2}{k_0^2} \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$$

ist. Nach der p_0 -Integration bekommen wir also

$$\text{disk } \Pi^i(q_0, q_{\max}) = - \frac{1}{\alpha^2 (2\pi)^2} \frac{1}{k_0^4 \Lambda^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d^3 \underline{k} \left\{ \theta(k_0 + \frac{2\Lambda^2}{4k_0} 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}) \theta(k_0 - \frac{2\Lambda^2}{4k_0} 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}) \times \right.$$

$$(3.68) \quad x(2m^2 - 2k_0^2) \frac{\theta\left(\frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{2k_0^2} \sin^2\left\{\frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{2} - \sin^2\right\}_3\right) \theta\left(1 - \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{2k_0^2} \sin^2\left\{\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} + \sin^2\right\}_3\right)}{\sqrt{\frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{2k_0^2} \sin^2\left\{\frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{2} - \sin^2\right\}_3} \sqrt{1 - \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{2k_0^2} \sin^2\left\{\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} + \sin^2\right\}_3}}$$

Die beiden Grenzkurven, zwischen denen das Integrationsgebiet liegt, entnehmen wir den Argumenten der letzten beiden θ -Funktionen.

$$\mathcal{K}_0 \equiv \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2k_0^2} x^2(1-x^2) - y^2 = \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2k_0^2} (x^2 - \frac{1}{2})^2 - y^2 = 0$$

$$(3.69) \quad \mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_0 - 1 \equiv \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{3}{2} + \frac{2\lambda^2}{16k_0^2} - \frac{2\lambda^2}{4k_0^2} (x^2 - \frac{1}{2})^2 - y^2 = 0$$

$$x := \sin\left\{\frac{\omega}{2}\right\}, \quad y := \sin\left\{\frac{\omega}{2}\right\}_3$$

Aus den Kreisen sind jetzt Kurven vierter Ordnung geworden, die je nach der Größe von k_0 ein verschiedenes Bild liefern.

Untersuchen wir zuerst den Fall $\frac{k_0}{2\lambda} \leq \frac{1}{4}$. Die beiden ersten θ -Funktionen von (3.68) bedeuten eine weitere Begrenzung des Integrationsgebiets und fordern

$$(3.70) \quad \frac{4k_0^4}{(2\lambda^2)^2} \geq x^2(1-x^2)$$

was bedeutet, daß

$$(3.71) \quad (x^2 - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4} (1 - 16 \frac{k_0^4}{(2\lambda^2)^2})$$

sein muß. Das setzen wir in $\mathcal{K}_0$ (3.69) ein

$$(3.72) \quad \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{2\lambda^2}{16k_0^2} - \frac{2\lambda^2}{4k_0^2} (x^2 - \frac{1}{2})^2 - y^2 \leq \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{2\lambda^2}{16k_0^2} - \frac{2\lambda^2}{16k_0^2} (1 - 16 \frac{k_0^4}{(2\lambda^2)^2}) = 2 \frac{k_0^2}{2\lambda^2} - \frac{m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}$$

Man sieht, $\mathcal{K}_0$ nicht und noch weniger $\mathcal{K}_1$ lassen sich für

$$(3.73) \quad \frac{k_0^2}{2\lambda^2} < \frac{1}{4} + \frac{m^2}{2\lambda^2}$$

erfüllen und das Gebiet zwischen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ liegt außerhalb des erlaubten Bereiches (3.70), weshalb das Integral in diesem Intervall verschwindet. Andererseits hat $\mathcal{K}_1$ im Intervall

$$(3.74) \quad \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda^2} + \frac{m^4}{4\lambda^4}} \approx \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{m}{\lambda} \leq \frac{k_0^2}{2\lambda^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{m}{\lambda}$$

keine reelle Lösung, weil dafür nach (3.69) $\frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{\rho k_0^2} \geq 0$ sein müßte. $\mathcal{E}_2$ läßt sich in einem noch größeren Intervall, welches das obige umfaßt, nicht erfüllen. Es ist also gezeigt, daß das Spektrum erst mit

$$(3.75) \quad \frac{k_0^2}{2\lambda^2} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{m}{\lambda} + O\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)$$

beginnen kann; hier liefert (3.70) keine Einschränkung mehr. Gegenüber $\frac{1}{4}$ dürfen wir aber $\frac{m}{\lambda}$ für unsere weiteren Untersuchungen getrost vernachlässigen und wir setzen

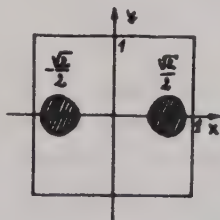
$$(3.76) \quad \frac{k_0^2 - m^2}{2\lambda^2} =: K^2 \approx \frac{k_0^2}{2\lambda^2}$$

wodurch sich (3.69) vereinfacht

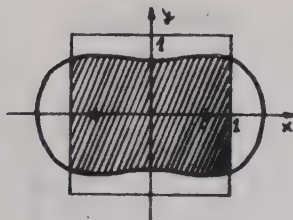
$$(3.77) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &\equiv K^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16K^2} - \frac{1}{4K^2} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = 0, \\ \mathcal{E}_2 &\equiv K^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{16K^2} - \frac{1}{4K^2} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Das Spektrum teilen wir jetzt in die folgenden Intervalle ein

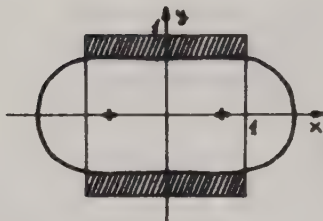
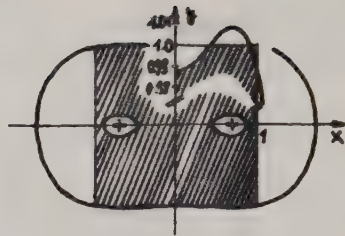
$$1) \quad \frac{1}{4} \leq K^2 \leq \frac{1}{2}$$



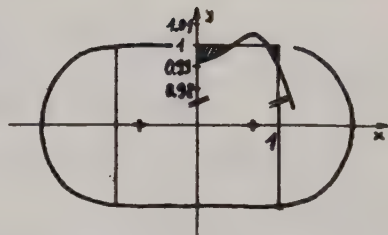
$$2) \quad \frac{1}{2} \leq K^2 \leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$3) \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq K^2 \leq \frac{3}{2}$$

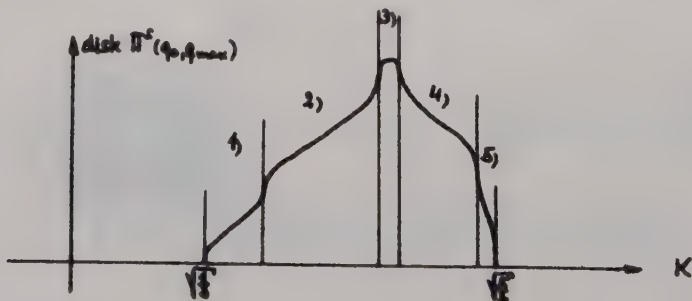


$$4) \frac{3}{2} \leq K^2 \leq \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$5) \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq K^2 \leq \frac{5}{2}$$

Außerhalb dieser Intervalle verschwindet die Diskontinuität identisch. Wir stellen fest, daß gegenüber dem Fall $q=0$ die Struktur des Spektrums komplizierter geworden ist und daß sein Bereich sich zusammengezogen hat, denn es liegt jetzt zwischen $K^2 = \frac{1}{4}$ und $K^2 = \frac{5}{4}$, während es bei $q=0$ im Intervall $(0,3)$ lag. Qualitativ ist ein Verlauf der Spektraldichte etwa in folgender Gestalt zu erwarten



Ihre Berechnung müßte wiederum auf einer Rechenanlage durchgeführt werden. Mit diesem Beispiel wollen wir die Untersuchung der Vakuumpolarisation im Gitterraum beschließen; ihre Struktur betrachten wir als im wesentlichen aufgeklärt.

4. Über höhere Näherungen zur Massenbestimmung

In der Kettennäherung der Zweiteilchen-Streuamplitude haben wir ein Massenspektrum erhalten: es ist aber schwer zu sagen, wie gut unsere Approximation tatsächlich ist. Wir erwarten Aufschluß darüber bei der Untersuchung höherer Näherungen, die in ihrer Struktur eine wesentliche Erweiterung des bisherigen Verfahrens bringen. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, die Kettennäherung zu verallgemeinern. Die bisher betrachteten Graphen enthielten zur gleichen Zeit immer zwei Fermionlinien. Bosonen können aber auch aus mehr als zwei Fermionen zusammengesetzt sein, so daß wir Graphen zulassen wollen, in welchen vier, sechs u.s.w. gleichzeitige Fermionlinien auftreten. Dann würden wir von der Kettennäherung

$$(4.1) \quad \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

zu etwa folgender Gleichung für die Streuamplitude $A(s,t)$ übergehen

$$(4.2) \quad A(s,t) \equiv \text{Diagram 4} = \text{Diagram 5} + \frac{1}{2} \text{Diagram 6} + \frac{1}{2} \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2$$

Der zweite Term der rechten Seite von (4.1) wurde symmetrisiert, weil wir sonst Graphen wie



ausgeschlossen hätten. Aus der einfachen Gleichung (4.1) ist jetzt eine nichtlineare Integralgleichung für die Streuamplitude geworden. Wir wollen uns ein Bild von der Art der Lösung verschaffen, indem wir zu einem ersten Iterationsschritt unsere Kettennäherung in den letzten Term von (4.2) einsetzen und das Integral anschreiben.

$$= \sum_{j,j',i,i'} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F^j \Gamma^j D_F^{j,j'} \Gamma^{j'} S_F^{i'} D_F^{i,i'} \Gamma^{i'}.$$

Die Γ durchlaufen die Vertizes S,P,V,A und die D_F gewinnt man über die Gleichungen (2.29) und (2.37). Wir wissen, daß D_F eine Schwelle bei $q^2 = 4m^2$ hat, außerdem im Fall des Skalars und des Pseudoskalars auch einen Pol. Alle diese Singularitäten bewirken Verzweigungsschnitte des Integrals in der Variablen S , nämlich Schwellen bei $16m^2, 4\mu_s^2, 4\mu_p^2, (\mu_s + \mu_p)^2, (2m + \mu_s)^2$ und $(2m + \mu_p)^2$; dazu gibt es noch Schwellen in den gekreuzten Kanälen. Auf diese Weise kommen mit jedem Iterationsschritt neue Singularitäten zu den bisherigen dazu. Es können aber in der vollständigen Lösung von (4.2) auch noch neue Pole auftreten. Unsere Betrachtung zeigt, daß die Berechnung der Streumatrix in höheren Näherungen sehr kompliziert wird.

Wir sind hier aber nicht an der vollen Streuamplitude interessiert, sondern wir wollen die Massen der Bosonen bestimmen, die in der Vierfermionentheorie existieren und die Pole der S-Matrix sind. Die Boson-Pole sind aber auch die Pole der Partialwellen mit gleichem Drehimpuls wie der Bosonenspin. Die Partialwellen hängen nur von einer Variablen ab, und daher sollte es unser Problem vereinfachen, wenn wir Approximationsmethoden für die Partialwellen anwenden. Die dynamischen Gleichungen sind hier die N/D -Gleichungen. Sie liefern eine Streuamplitude, welche die Unitarität und das Crossingprinzip erfüllt, verlangen aber Information über die Singularitäten von $A(s,t)$ in den gekreuzten Kanälen. Wir wollen uns also der N/D -Methode zuwenden und die gewünschten Gleichungen aufstellen. Dabei müssen wir uns aber zunächst mit der Kinematik der Vierfermion-Streuprozesse befassen, um die Partialwellen aus der Streuamplitude $A(s,t)$ herausprojizieren zu können.

4.1 Die Partialwellenentwicklung

Im folgenden beschäftigen wir uns nur mit der relativistisch kovarianten Theorie. Die Übertragung auf den Gitterraum ist im Prinzip unschwer durchzuführen: Die Partialwellen sind für die kubische und die Rotations-symmetrie in den S- und den P-Wellen gleich, erst bei höheren Drehimpulsen unterscheiden sie sich, so daß wir andere Projektionsformeln anwenden müssen [22]. Für die Partialwellenentwicklung eignen sich besonders die Helizitätsamplituden, weil die Eigenzustände zum Helizitätsoperator $\lambda = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}}{|\mathbf{p}|}$ invariant bei Drehung der Impulsrichtung bleiben und die Summation über die verschiedenen Richtungen λ nicht berührt. Den Streuprozess eines Teilchens und eines Antiteilchens wollen wir im Schwerpunktsystem beschreiben und zwar legen wir die Koordinaten so, daß das Teilchen vor der Streuung in Z-Richtung, das Antiteilchen entgegengesetzt fliegt. Nach der Streuung fliege das Teilchen in der θ, ϕ -Richtung davon, das Antiteilchen in die Gegenrichtung. Der Betrag des Impulses ist immer der gleiche

$$(4.3) \quad |\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2} =: \sqrt{v}$$

$$t = -2v(1-z), \quad u = -2v(1+z), \quad z = \cos \theta$$

Die Partialwellenentwicklung wird gegeben durch [23]

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \langle |\mathbf{p}|, \theta, \phi, \lambda_3 \lambda_4 | A | |\mathbf{p}|, 0, 0, \lambda_1 \lambda_2 \rangle &\equiv \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ &= 16\pi \sum_{J=\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)} (2J+1) \langle \lambda_3 \lambda_4 | A^J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \mathcal{D}_{\lambda_\mu}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) \\ \lambda &:= \lambda_1 - \lambda_2, \quad \mu := \lambda_3 - \lambda_4 \\ \langle \lambda_3 \lambda_4 | A^J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-1}^1 dz \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \mathcal{D}_{\lambda_\mu}^J(\phi, \theta, -\phi). \end{aligned}$$

Die $\mathcal{D}_{\lambda_\mu}^J$ sind Matrixelemente der Darstellung $\mathcal{D}^J$ der Drehgruppe [24]

$$(4.5) \quad \mathcal{D}_{\lambda_\mu}^J(\phi, \theta, -\phi) = e^{-i\lambda\phi} d_{\lambda_\mu}^J(\theta) e^{i\mu\phi}$$

$$d_{\lambda\mu}^j(\theta) = (-1)^{N-\mu} \left[\frac{(j+\mu)!(j-\mu)!}{(j+N)!(j-N)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{\frac{j-\mu}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{j+\mu}{2}} P_{j-N}^{(\lambda-\mu, \lambda+\mu)}(z)$$

$$M = \max(\lambda, \mu), \quad N = \min(\lambda, \mu), \quad \text{obdA. } M \geq 0$$

Dabei sind die $P_j^{a,b}$ die Jacobischen Polynome. Die Helizitäten λ_i haben je die Werte $\pm \frac{1}{2}$, so daß λ und μ die Werte $0, \pm 1$ annehmen. Deshalb treten bei unserem Streuprozeß die Funktionen

$$\begin{aligned} d_{00}^j(\theta) &= P_j^{0,0}(z) \equiv P_j(z) \quad (\text{Legendre-Polynom}) \\ (4.6) \quad d_{10}^j(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \sqrt{1-z^2} P_{j-1}^{1,1}(z) \\ d_{11}^j(\theta) &= \frac{1}{2} (1+z) P_{j-1}^{0,2}(z), \quad d_{1,-1}^j(\theta) = \frac{1}{2} (1-z) P_{j-1}^{2,0}(z) \end{aligned}$$

auf (die fehlenden $d_{\lambda\mu}^j$ sind bis auf Vorzeichen mit den angeschriebenen identisch [24], [25]). Die D^j stellen eine Drehung

$$(4.7) \quad R_{\phi, \theta, -\phi} = e^{-iJ_z \phi} e^{-iJ_y \theta} e^{iJ_z \phi}$$

dar, also zunächst mit dem Winkel ϕ um die z-Achse, dann mit θ um die y-Achse und um ϕ zurück um die z-Achse. Mit $R_{\phi, \theta, -\phi}$ läßt sich aus einem Zustand $||\rho, 0, \lambda_i\rangle$ ein Zustand beliebiger Richtung herstellen

$$(4.8) \quad ||\rho, \theta, \varphi, \lambda_i\rangle = R_{\phi, \theta, -\phi} ||\rho, 0, \lambda_i\rangle$$

Wie (4.5) zeigt, sind die $d_{\lambda\mu}^j$ -Funktionen Polynome in z mal Potenzen von $(1 \pm z)$, die auch halbzahlig sein können (d_{10}^j in (4.6)). Solche Wurzeln geben Anlaß zu Schnitten in t und u , die rein kinematischer Natur sind und keine wesentliche physikalische Information enthalten. Es ist daher vorteilhaft, diese Faktoren aus der Streuamplitude herauszuziehen und die Partialwellenentwicklung in den Jacobischen Polynomen allein zu schreiben. In gleicher Weise gibt es im s-Kanal kinematische Singularitäten, wenn man die Partialwellenentwicklung für den τ -Kanal durchführt. Für Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$, Parität $+1$) enthält die Streuamplitude Faktoren [24], [26]

$$(4.9) \quad (s-4m^2)^{-\alpha/2} s^{A/2} \quad \text{mit} \quad \alpha = 2 - |\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & |\lambda - \mu| \text{ gerade} \\ 1 & |\lambda - \mu| \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir gehen also zu folgenden Amplituden über, die von kinematischen Singularitäten frei sind:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} A_1(s, t) &:= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A(s, t) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle & A_1^J(s) &:= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A^J(s) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \\ A_2(s, t) &:= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A(s, t) | -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle & A_2^J(s) &:= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A^J(s) | -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \\ A_3(s, t) &:= \frac{2}{1+\epsilon} \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | A(s, t) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle & A_3^J(s) &:= \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | A^J(s) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \\ A_4(s, t) &:= \frac{2}{1-\epsilon} \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | A(s, t) | -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle & A_4^J(s) &:= \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | A^J(s) | -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \\ A_5(s, t) &:= \frac{2}{\sqrt{s} \sqrt{1-\epsilon^2}} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A(s, t) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle & A_5^J(s) &:= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | A^J(s) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \end{aligned}$$

Alle anderen Helizitätsamplituden sind wegen der Paritätserhaltung, Zeitspiegelungsinvarianz und Spinerhaltung (siehe unten Gl. (4.28)) gleich einer dieser fünf Amplituden [28]. Mit (4.4) lauten ihre Partialwellenentwicklungen:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} A_1(s, t) &= 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) A_1^j(s) P_j(z) \\ A_2(s, t) &= 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) A_2^j(s) P_j(z) \\ A_3(s, t) &= 16\pi \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_3^j(s) P_{j-1}^{92}(z) \\ A_4(s, t) &= 16\pi e^{-2i\phi} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_4^j(s) P_{j-1}^{210}(z) \\ A_5(s, t) &= 16\pi e^{i\phi} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2j+1}{j}} (2j+1) \frac{A_5^j(s)}{\sqrt{s}} P_{j-1}^{41}(z) \end{aligned}$$

Die Partialwellen $A_i^J(s)$ haben folgende Singularitätenstruktur [24]: Oberhalb der Schwelle $s=4m^2$ und für $s < 0$ je einen Schnitt von den Streuprozessen im direkten und den gekreuzten Kanälen. Bindungszustände mit Spin $\sigma=J$ bilden Pole in A_i^J . Wenn die Massen der Bindungszustände klein sind, bewirken sie Schnitte, deren Verzweigungspunkte unterhalb der Schwelle $4m^2$ liegen können.

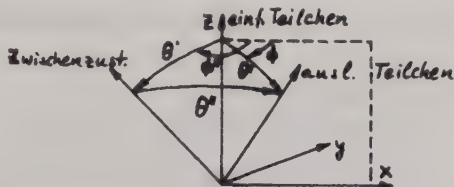
4.2 Die Unitaritätsgleichungen

Für eine erste Näherung wollen wir annehmen, daß - wie bei der Kettennäherung - nur Vierfermionprozesse bei der Streuung eine Rolle spielen. Dann haben wir die Unitarität der S-Matrix in ihrer einfachsten Form [27]

$$\text{---} \bigcirc \oplus \text{---} - \text{---} \bigcirc \ominus \text{---} = \text{---} \bigoplus \text{---} \text{---} \bigominus \text{---}$$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle - \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ &= \frac{2ip}{32 \pi^2 \sqrt{s}} \sum_{\lambda' \lambda''} \int d\Omega' \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t') | \lambda' \lambda'' \rangle \langle \lambda' \lambda'' | A(s, t'') | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ & s_{\pm} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (s + i\varepsilon), \quad s \geq 4m^2 \end{aligned}$$

Zwischen t , t' und t'' besteht (vgl. (4.3)) der Zusammenhang:



Die Drehung von der z -Achse in die θ, ϕ -Richtung wird also im Integral in zwei Schritten ausgeführt

$$(4.13) \quad \mathcal{D}^j = \mathcal{D}^{j''} \mathcal{D}^{j'}$$

Wir drücken daher $\mathcal{D}^{j''}$ durch $\mathcal{D}^j$ und $\mathcal{D}^{j'}$ aus [25]

$$(4.14) \quad \mathcal{D}_{m'm}^{j''*} = \sum_{m''} \mathcal{D}_{m'm''}^{j*}(\phi', -\theta', -\phi') \mathcal{D}_{m''m}^{j*}(\phi, \theta, \phi).$$

Wir setzen die Partialwellenentwicklung (4.4) mit (4.14) in die Unitaritätsgleichung ein und können die Orthogonalitätsrelationen der $\mathcal{D}$ -Matrizen anwenden

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \int d\Omega' \mathcal{D}_{\lambda\kappa}^{j''*} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{j''*} &= \sum_m \int d\Omega' e^{-i(\lambda-m)\phi'} d_{\lambda\kappa}^j(\theta) d_{m\kappa}^{j'}(\theta) \mathcal{D}_{m\mu}^{j*}(\phi, \theta, \phi) \\ &= \frac{4\pi}{2j+1} \delta_{j'j} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{j*}(\phi, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$(4.16) \quad d_{km}^{j'}(-\theta') = d_{m\kappa}^{j'}(\theta')$$

benützt. Der Koeffizientenvergleich liefert uns dann die Unitaritätsbeziehungen für die Partialwellen

$$(4.17) \quad \langle \lambda_3 \lambda_4 | A^j(s_+) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \sim \langle \lambda_3 \lambda_4 | A^j(s_-) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{4ip}{\sqrt{s}} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A^j(s_+) | \lambda' \lambda' \rangle \langle \lambda' \lambda' | A^j(s_-) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle.$$

Dies ist mit (4.10) ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \text{disk } A_1^j &= \frac{4ip}{\sqrt{s}} [A_1^j(s_+) A_1^j(s_-) + A_2^j(s_+) A_2^j(s_-) + 2 A_5^j(s_+) A_5^j(s_-)] \\ \text{disk } A_2^j &= \frac{4ip}{\sqrt{s}} [A_1^j(s_+) A_2^j(s_-) + A_2^j(s_+) A_1^j(s_-) + 2 A_5^j(s_+) A_5^j(s_-)] \\ (4.18) \quad \text{disk } A_3^j &= \frac{4ip}{\sqrt{s}} [A_3^j(s_+) A_3^j(s_-) + A_4^j(s_+) A_4^j(s_-) + 2 A_5^j(s_+) A_5^j(s_-)] \\ \text{disk } A_4^j &= \frac{4ip}{\sqrt{s}} [A_3^j(s_+) A_4^j(s_-) + A_4^j(s_+) A_3^j(s_-) + 2 A_5^j(s_+) A_5^j(s_-)] \\ \text{disk } A_5^j &= \frac{4ip}{\sqrt{s}} [(A_1^j(s_+) + A_2^j(s_+)) A_5^j(s_-) + A_5^j(s_+) (A_3^j(s_-) + A_4^j(s_-))] \end{aligned}$$

Diese Beziehungen vereinfachen sich, wenn wir zu neuen Partialwellen übergehen.

$$\begin{aligned} B_1^j(s) &:= \frac{1}{p^2} (A_1^j(s) + A_2^j(s)) \\ B_2^j(s) &:= \frac{1}{p^2} (A_1^j(s) - A_2^j(s)) \\ (4.19) \quad B_3^j(s) &:= \frac{1}{p^2} (A_3^j(s) + A_4^j(s)) \\ B_4^j(s) &:= \frac{1}{p^2} (A_3^j(s) - A_4^j(s)) \\ B_5^j(s) &:= \frac{1}{p^2 \sqrt{s}} A_5^j(s). \end{aligned}$$

Dabei stellt sich heraus, daß B_2 und B_4 nicht mehr an die übrigen Amplituden koppeln

$$(4.20) \quad \text{disk } B_\kappa^j(s) = \frac{4ip^3}{\sqrt{s}} B_\kappa^j(s_+) B_\kappa^j(s_-), \quad \kappa = 1, 4$$

B_1 , B_3 und B_5 entkoppeln aber nicht und wir führen die Matrix

$$(4.21) \quad B^j(s) = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} B_1 & s B_5 \\ B_5 & B_3 \end{pmatrix}$$

ein. Wir wissen, daß die Amplituden $B_\kappa^j(s)$ ($\kappa = 1, \dots, 5$) reell analytische Funktionen sind [27], d.h. zwischen dem rechten und dem linken Schnitt ist $B_\kappa^j(s)$ reell auf

der reellen Achse und längs der Schnitte gilt infolge des Schwartzschen Spiegelungsprinzips

$$(4.22) \quad \text{disk } B_k^j = 2i \mathcal{I}_m B_k^j, \quad [\text{Re } B^j(s), \mathcal{I}_m B^j(s)] = 0.$$

Dann erhalten wir die Unitaritätsgleichung für B^j

$$(4.23) \quad \text{disk } B^j(s) = \frac{qip^3}{\sqrt{s}} B^j B^{j*} = \frac{qip^3}{\sqrt{s}} B^{j*} B^j$$

Der Faktor $\frac{1}{p^2}$, den wir in (4.19) und (4.21) eingeführt haben, ist für die Anwendung der Existenzsätze für eine Lösung $B_k^j(s)$ unseres Problems bequem. Man erwartet ein Schwellenverhalten der Partialwellen $A^j(s) = O(p^j)$, $p \rightarrow 0$, so daß wir für die Amplituden B_k^j das Schwellenverhalten $B_k^j(s) = O(p^{2(j-1)})$, $p \rightarrow 0$ bekommen, was bedeutet, daß $B_k^0(s) \sim \frac{1}{p^2}$ für $p \rightarrow 0$ anwachsen darf.

Das Ergebnis (4.20) und (4.23) läßt sich leicht interpretieren. Bei der Zusammensetzung von zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Zuständen gibt es einen Singulettzustand und drei Triplettzustände. Wir legen die Impulsrichtung in die z-Achse, dann ist die dritte Komponente des Bahndrehimpulses L_3 gleich Null und die dritten Komponenten der Spins sind $+\lambda_1$ beim Teilchen und $-\lambda_2$ beim Antiteilchen. Damit ist die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses $J_3 = \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Der Bahndrehimpuls L , der Gesamtspin S , der Gesamtdrehimpuls J sowie $L_3 = 0$ bilden einen vollständigen Satz von Quantenzahlen für die Drehimpulzzustände des Teilchen-Antiteilchensystems, ihre Eigenzustände bezeichnen wir mit $|LSJL_3\rangle$. Andererseits bilden die Quantenzahlen J, J_3, λ_1 und λ_2 ein weiteres vollständiges System, das unserer Helizitätsbeschreibung besser angepaßt ist, wobei $J_3 = \lambda$ keine unabhängige Quantenzahl mehr ist. Die Umrechnung des einen Systems auf das andere läßt sich mit den Wignerschen 6-j-Symbolen angeben [25], [29]

$$(4.24) \quad \langle LSJ 0 | J(\lambda) \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{2L+1} \sqrt{2S+1} (-1)^{L-S} \begin{pmatrix} LSJ \\ 0 \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{2} S \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist

$$\text{Singulett } J=L, S=0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|J, \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle - |J, -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle)$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Triplet} \quad J=L, S=1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\
 (4.25) \quad &J=L+1, S=1 \quad \sqrt{\frac{2}{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) - \sqrt{\frac{2}{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right) \\
 &J=L-1, S=1 \quad \sqrt{\frac{2}{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) + \sqrt{\frac{2}{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right)
 \end{aligned}$$

Daß dies tatsächlich die Singulett- bzw. Tripletzustände sind, prüft man leicht nach, wenn man den Operator des Gesamtspins darauf anwendet. Für die Übergänge zwischen diesen Zuständen gelten neben der Drehimpulserhaltung noch zwei Auswahlregeln. Bekanntlich hat ein Nukleon-Antinukleon-System die Parität [30]

$$(4.26) \quad \zeta = (-1)^{L+1}$$

Da unsere Wechselwirkung die Parität erhält, gibt es keine Übergänge zwischen Zuständen mit $J=L$ und $J=L+1$. Zum zweiten geht ein Teilchen-Antiteilchen-System bei Ladungskonjugation wieder in ein Teilchen-Antiteilchen-System über

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle &:= \int dx dx' f(x, x') \psi^\dagger(x) \psi_c^\dagger(x') |0\rangle \\
 (4.27) \quad |\phi\rangle &\rightarrow C |\phi\rangle = \int dx dx' f(x, x') \psi_c^\dagger(x) \psi^\dagger(x') |0\rangle \\
 &= - \int dx dx' f(x, x') \psi^\dagger(x') \psi_c^\dagger(x) |0\rangle \\
 &= - \int dx dx' f(x', x) \psi^\dagger(x) \psi_c^\dagger(x') |0\rangle
 \end{aligned}$$

Dabei soll x auch die Spinvariablen enthalten. Der Hamiltonoperator ist invariant gegenüber Ladungskonjugation, der Operator C vertauscht also mit ihm. Da zweimalige Anwendung von C wieder zum ursprünglichen Zustand zurückführt, gilt $C^2=1$, was bedeutet, daß die Eigenwerte von C gleich ± 1 sind. Es gibt somit ebenfalls keine Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Ladungsparität η . Ist $\eta=1$, so muß wegen (4.27) die Wellenfunktion $f(x, x')$, die sich aus Orts- und Spinwellenfunktion zusammensetzt, antisymmetrisch bei Vertauschung von x und x' sein, für $\eta=-1$ symmetrisch. Da die Spin-Wellenfunktion im Singulettzustand antisymmetrisch und im Tripletzustand symmetrisch ist, ergibt sich

$$(4.28) \quad \eta = (-1)^{L+S}$$

In (4.25) hat der Triplettzustand mit $J=L$ gegenüber den anderen die entgegengesetzte C-Parität und es gibt darum gar keine Übergänge zwischen Singulett und Triplett. Wir vergleichen (4.25) mit (4.19) und (4.10) und erkennen, daß B_1^2 und B_4^2 die Übergangsamplituden für das Singulett und das Triplett mit $J=L$ darstellen, während B_1^2 , B_3^2 und B_5^2 zu $J=L+1$ gehören.

Wir können jetzt feststellen, welche Teilchen den Polen der einzelnen Partialwellen entsprechen. Für S- und P-Wellen ergeben unsere Überlegungen das folgende Bild

S-Wellen $I=0$ Singulett $\frac{1}{\sqrt{2}} (10, \frac{1}{2} \frac{1}{2}) - 10, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$
 $J=0, \eta=1$ Pseudoskalar „ π -Meson“

Triplett $J=1$ —

$J=1$ —

$J=L+1 \frac{1}{\sqrt{3}} (11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (1, -\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}} (11, \frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$

$J=0, \eta=-1$, Vektor „ ρ -Meson“

(4.29) P-Wellen $L=1$ Singulett $\frac{1}{\sqrt{2}} (11, \frac{1}{2} \frac{1}{2}) - (1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2})$
 $J=1, \eta=-1$ Axialvektor „ B -Meson“

Triplett $J=L: \frac{1}{\sqrt{2}} (11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - (1, -\frac{1}{2} \frac{1}{2})$

$J=1, \eta=1$ Axialvektor „ A_1 -Meson“

$J=L+1: \frac{1}{\sqrt{2}} (10, \frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (10, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$

$J=1, \eta=1$ Skalar „ η (1070)“

$J=L+1: \sqrt{\frac{2}{3}} (12, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (12, -\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}} (12, \frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (12, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$

$J=1, \eta=1$ Tensor „ f -Meson“

Der Vektor tritt in den D-Wellen noch einmal auf. Wir sehen, daß die Pole der $J=L+1$ -Amplituden im allgemeinen nicht zu einem bestimmten Bahndrehimpuls des Teilchen-Anteilchensystems gehören werden. Ein Polterm der Matrix $B^J(s)$ in (4.21) mag bezüglich irgendeiner Linearkombination der Zustände mit $J=L+1$ und $L=J-1$ diagonal sein, deshalb sind die einfacheren Amplituden B_1 , B_3 und B_5 ebenso gut geeignet wie die Übergangsmatrixelemente zu scharfem Bahndrehimpuls.

4.3 Die N/D-Gleichungen

Die Unitaritätsgleichungen (4.20) und (4.23) sind nichtlineare Beziehungen für die Partialwellen auf dem rechten Schnitt. Wenn wir die Diskontinuität der $B_k^J(s)$ längs des linken Schnittes kennen würden, könnten wir über den Cauchyschen Satz eine Bestimmungs Gleichung für die Amplituden $B_k^J(s)$ auf der ganzen s -Ebene aufstellen, soweit wir B_k^J als elastisch annehmen (vgl. (4.12)). Näherungsweise wollen wir versuchen, für den t - und den u -Kanal die Kettennäherung der Teilchen-Antiteilchen-Streuung einzusetzen. Wir verwenden jetzt statt s die Variable

$$(4.30) \quad v = p^2, \quad s = 4(v + m^2)$$

was den Vorteil hat, daß der rechte Schnitt bei $v=0$ beginnt. Die Partialwellen haben folgende Eigenschaften

1) $B_k^J(v)$ sind reell analytisch

$$(4.31) \quad B_k^{J*}(v) = B_k^J(v^*) \quad k = 1, \dots, 5$$

2) Die Diskontinuität am linken Schnitt sei bekannt

$$(4.32) \quad \frac{1}{2i} \text{ disk } B_k^J(v) = \text{Im } B_k^J(v) = \pi \alpha_k^J(v), \quad -\infty < v \leq v_0 < 0$$

3) Auf dem rechten Schnitt gilt die Unitaritätsgleichung

$$(4.33) \quad \text{Im } B_{kV}^J(v) = v \sqrt{\frac{v}{v+m^2}} |B_{kV}^J(v)|^2 \text{ oder } \text{Im } \frac{1}{B_{kV}^J} = -v \sqrt{\frac{v}{v+m^2}},$$

und mit (4.22) und (4.23) haben wir auch

$$(4.34) \quad \text{Im } (B^J(v))^{-1} = -v \sqrt{\frac{v}{v+m^2}}$$

Die N/D-Methode besteht darin, daß wir die Partialwellen als Quotienten auffassen

$$(4.35) \quad B_k^J(v) = N_k^J(v) D_k^J(v)^{-1}, \quad B_k^J = B_2^J B_4^J B^J$$

wobei der Zähler die Singularität des linken Schnittes aufweist und für $v \gg 0$ singularitätenfrei ist, während D den rechten Schnitt bestimmt und auf dem linken Schnitt reell ist. Diese Zerlegung läßt sich eindeutig durchführen [24], [32]. Dann gilt (wir unterdrücken die Indizes)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} N(v) &= (\operatorname{Im} B(v)) D(v) = \pi \alpha(v) D(v), \quad -\infty < v \leq v_0 \\ (4.36) \quad \operatorname{Im} D(v) &= -v \sqrt{\frac{v}{v+m^2}} N(v), \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Wenn wir fordern, daß $B(v)$ für $|v| \rightarrow \infty$ verschwindet und wir weiter $D(v)$ gegen eine Konstante für $v \rightarrow \infty$ gehen lassen, so daß $N(v) \rightarrow 0$ strebt, können wir für N eine unsubtrahierte und für D eine einmal subtrahierte Dispersionsrelation aufstellen

$$\begin{aligned} (4.37) \quad N(v) &= \int_{-\infty}^{v_0} \alpha(v') D(v') \frac{dv'}{v'-v}, \\ D(v) &= 1 - \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} v' \sqrt{\frac{v'}{v'+m^2}} N(v') \frac{dv'}{v'(v'-v)}, \quad D(0) = 1. \end{aligned}$$

Wir setzen die erste Gleichung in die zweite ein und vertauschen die Integrationen

$$(4.38) \quad D(v) = 1 - v \int_{-\infty}^{v_0} dv' K(v, v') \alpha(v') D(v'),$$

$$K(v, v') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dv'' \sqrt{\frac{v''}{v''+m^2}} \frac{1}{(v-v')(v'-v'')}$$

Die Integration von $K(v, v')$ läßt sich elementar ausführen und man erhält

$$(4.39) \quad K(v, v') = \frac{1}{\pi} \frac{y(v) - y(v')}{v - v'}$$

$$y(v) = \sqrt{\frac{v}{v+m^2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{v/(v+m^2)}}{1 - \sqrt{v/(v+m^2)}} \right|.$$

K ist, wie man aus (4.33) und (4.34) ersieht, für alle drei Amplituden B_1^2 , B_2^2 und B^2 gleich. Wir haben also eine lineare Integralgleichung für D erhalten, aus deren Lösung man N und damit B über eine Integration berechnen kann.

4.4 Projektion der Partialwellen aus der Kettennäherung

Für die explizite Gestalt der Gleichung (4.38) fehlen uns noch die Funktionen $\alpha_1^2(v)$, $\alpha_2^2(v)$ und $\alpha^2(v)$.

Diese sind die Diskontinuitäten der Partialwellenamplituden B_k^j auf dem linken Schnitt, welche wir durch die Projektion aus den Amplituden $A_k(s,t)$ Gl. (4.10) bekommen können. Mit (4.4) lauten die Projektionsformeln

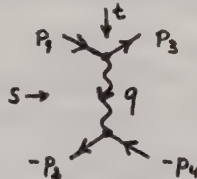
$$B_{\frac{1}{2}}^j(v) = \frac{1}{32\pi v} \int_{-1}^1 (A_1 \pm A_2) P_j(z) dz$$

$$(4.40) \quad B_{\frac{3}{2}}^j(v) = \frac{1}{128\pi v} \int_{-1}^1 (A_3 \cdot (1+z)^2 P_{j-1}^{0,2}(z) \pm e^{2i\phi} A_4 \cdot (1-z)^2 P_{j-1}^{2,0}(z)) dz$$

$$B_5^j(v) = \frac{e^{-i\phi}}{64\pi v} \sqrt{\frac{2+z}{2-1}} \int_{-1}^1 A_5 \cdot (1-z^2) P_{j-1}^{4,1}(z) dz$$

unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen der Jacobi-Polynome [21].

Die Amplituden $A_k(s,t)$ bestimmen wir aus der Streuamplitude im t-Kanal und im u-Kanal. Der t-Kanal der Teilchen-Antiteilchen-Streuung ist durch den folgenden Graphen gekennzeichnet:



das ist wieder ein Teilchen-Antiteilchenprozeß und wird durch die Wechselwirkung (1.51) beschrieben. Die Matrixelemente sind von der Form

$$(4.41) \quad \sum \bar{u}(p_3, \lambda_3) O^i u(p_1, \lambda_1) D^{ij}(t) \bar{v}(p_2, \lambda_2) O^j v(p_4, \lambda_4),$$

$$i, j = S, P, V, A$$

Die Spinoren der ein- und auslaufenden Teilchen haben wir gleich als Helizitäts-Eigenlösungen gewählt.

Ein Teilchen mit Impuls $\underline{p}$ und Spin s in eine bestimmte Richtung $\underline{s}$ wird durch $u(p,s)$ beschrieben, ein Antiteilchen durch $v(p,s)$. Wir nehmen hier als Polarisationsrichtung den Impuls und erhalten die Helizitätseigenzustände. Die einfallenden Teilchen bewegen sich in z-Richtung, so daß in diesem Fall die Polarisationsachse mit der z-Achse zusammenfällt und wir die bekannten Lösungen

der Diracgleichung einsetzen können [12] (direktes Produkt von Zweierspinoren)

$$(4.42) \quad u(p_1, \lambda_1) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} E+m \\ 2\lambda_1 p \end{pmatrix} \otimes \chi_{\lambda_1}, \quad N = \sqrt{E(E+m)}$$

χ_{λ_1} ist die Eigenfunktion von $\frac{1}{2}\sigma_z$ mit dem Eigenwert λ_1 , gibt also die Polarisation an. Das Antiteilchen 2 bewegt sich in negativer z-Richtung, so daß λ_2 die Polarisation bezüglich der negativen z-Achse ist. Da aber $v(p, s)$ gerade durch $\frac{1}{N} \begin{pmatrix} -s p \\ E+m \end{pmatrix} \otimes \chi_s$ definiert ist, gilt

$$(4.43) \quad \bar{v}(p_2, \lambda_2) = \frac{1}{N} (-2\lambda_2 p \quad E+m) \otimes \chi_{\lambda_2}^+$$

Zustände mit beliebiger Impulsrichtung erhält man, wenn man (4.42) und (4.43) dreht. Wir beachten dabei, daß eine räumliche Drehung nur auf die χ -Spinoren wirkt.

$$\bar{u}(p_3, \lambda_3) = \frac{1}{N} (E+m \quad -2\lambda_3 p) \otimes \chi_{\lambda_3}^+ R_{\phi, \theta, -\phi}^+$$

$$(4.44) \quad v(p_4, \lambda_4) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -2\lambda_4 p \\ E+m \end{pmatrix} \otimes R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_4}$$

Aus (4.7) folgt

$$(4.45) \quad R_{\phi, \theta, -\phi} = e^{-i\sigma_3 \frac{\phi}{2}} e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{i\sigma_3 \frac{\phi}{2}}$$

bei Weyl-Spinoren.

Die Funktionen $D^{ij}(t)$ bekommen wir aus den Matrixelementen Gl'n (2.29), (2.32), (2.33), (2.34) und (2.37) und wir definieren, wobei wir die Kopplungskonstanten mit hereinziehen:

$$D^S(t) = \frac{2g}{1-2g\Pi^S(t)}$$

$$D^P(t) = \frac{-2g}{(1+2g\Pi^P(t)) + \frac{6}{4}g^4 \frac{(\Pi^{\Lambda P}(t))^2}{1-3g(a_1(t)-a_2(t))}} \approx \frac{-2g}{1+2g\Pi^P(t)}$$

$$D^{\nu\mu\nu}(t) = D_1^{\nu}(t) g^{\mu\nu} + D_2^{\nu}(t) \frac{\tilde{g}_\nu g_\nu^{\mu}}{4m^2}$$

$$D_1^{\nu}(t) = \frac{g}{1-g u_1(t)}$$

$$D_2^{\nu}(t) = \frac{g}{1-g u_1(t)} \cdot \frac{2 u_2(t)}{1-g(u_1-u_2)} \cdot \frac{16m^2}{t}$$

$$(4.45) \quad D^{\Lambda\mu\nu}(t) =: D_1^{\Lambda}(t) g^{\mu\nu} + D_2^{\Lambda}(t) \frac{q_1^{\mu} q_2^{\nu}}{4m^2}$$

$$D_1^{\Lambda}(t) = \frac{3g}{1-3ga_1(t)}$$

$$D_2^{\Lambda}(t) = \frac{3g}{1-3ga_1(t)} \frac{-(3ga_2(1+2g\pi^P)) - \frac{1}{2}g^2(\pi^{AP})^2 t}{(1+2g\pi^P)(1-3g(a_1-a_2)) - \frac{1}{2}g^2(\pi^{AP})^2 t} \frac{16m^2}{t}$$

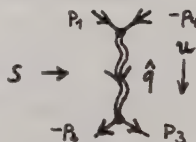
$$\approx \frac{3g}{1-3ga_1(t)} \cdot \frac{-3ga_2}{1-3g(a_1-a_2)} \cdot \frac{16m^2}{t}$$

$$D^{AP\mu}(t) =: \frac{q_1^{\mu}}{4m} D^{AP'}(t)$$

$$D^{AP}(t) = \frac{6g \pi^{AP}(t) 4m^2}{(1+2g\pi^P)(1-3g(a_1-a_2)) - 6g^2(\pi^{AP})^2 t/4} \approx 0.$$

Die Ausrechnung von (4.41) birgt keine Schwierigkeiten und wird im Anhang IV gebracht.

Im u-Kanal sind gegenüber dem t-Kanal die beiden auslaufenden Teilchen vertauscht



so daß wir einen Teilchen-Teilchen-Prozeß bekommen, für den wir die Wechselwirkung (2.67) einzusetzen haben.

$$(4.46) \quad \sum u^T(p_4\lambda_4) B \hat{O}^i u(p_1\lambda_1) \hat{D}^j(u) \bar{v}(p_2\lambda_2) \hat{O}^j B^T \bar{u}^T(p_3\lambda_3).$$

Aus den Beziehungen (2.74) entnehmen wir die Definitionen

$$\hat{D}^j(u) = \frac{2g}{(1-2g\pi^P(u)) - \frac{1}{2}g^2 u \frac{(\pi^{AP}(u))^2}{1-g(a_1(u)-a_2(u))}} \approx \frac{2g}{1-2g\pi^P(u)}$$

$$\hat{D}^{\Lambda\mu\nu}(u) = \hat{D}_1^{\Lambda}(u) g^{\mu\nu} + \hat{D}_2^{\Lambda}(u) \frac{q_1^{\mu} q_2^{\nu}}{4m^2}$$

$$(4.47) \quad \hat{D}_1^{\Lambda}(u) = \frac{-g}{1-ga_1(u)}$$

$$\hat{D}_2^{\Lambda}(u) = \frac{-g}{1-ga_1(u)} \frac{-ga_2(1-2g\pi^P) - \frac{1}{2}g^2(\pi^{AP})^2 u}{(1-2g\pi^P)(1-g(a_1-a_2)) - \frac{1}{2}g^2(\pi^{AP})^2 u} \frac{16m^2}{u}$$

$$\approx \frac{g}{1-ga_1(u)} \frac{ga_2}{1-g(a_1-a_2)} \frac{16m^2}{u}$$

$$\hat{D}^{KS\mu}(u) = \frac{q_1^{\mu}}{4m} D^{VS'}$$

$$D^{vs'}(u) = \frac{2g \Pi^{AP}(u) 4m^2}{(1-2g \Pi^P(u)(1-g(a_1-a_2)) - \frac{1}{2} g^2 (\Pi^{AP}(u))^2 u} \approx 0.$$

Die weitere Berechnung von (4.46) findet sich ebenfalls in Anhang IV.

(4.41) und (4.46) zusammen ergeben den Beitrag der gekreuzten Kanäle zur Streuamplitude, den wir mit $A_K^L(s, t)$ bezeichnen, weil sie nur den linken Schnitt haben. Mit der Zusammenfassung

$$(4.48) \quad D^{\tilde{P}}(t) := D^P(t) - D_2^A(t) - D^{PA'}(t)$$

$$\hat{D}^{\tilde{S}}(u) := \hat{D}^S(u) + \hat{D}_L^V(u) + \hat{D}^{VS'}(u)$$

finden wir

$$A_1^L(s, t) = \frac{1}{2} \left[- (D^S(t) + \hat{D}^P(u)) - (3 + \frac{4v}{m^2}) (D_1^A(t) - \hat{D}_1^V(u)) + \right. \\ \left. + (1 + \frac{4v}{m^2}) D_1^V(t) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[- (D^S(t) - \hat{D}^P(u)) + D_1^A(t) + \hat{D}_1^V(u) + D_1^V(t) \right] z,$$

$$A_2^L(s, t) = \frac{1}{2} \left[- \frac{v+m^2}{m^2} (D^S(t) + \hat{D}^P(u)) + \frac{v}{m^2} (D^{\tilde{P}}(t) - \hat{D}^{\tilde{S}}(u)) + \right. \\ \left. + D_1^V(t) - (D_1^A(t) - \hat{D}_1^V(u)) \right]$$

(4.49)

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{v+m^2}{m^2} (D^S(t) - \hat{D}^P(u)) - \frac{v}{m^2} (D^{\tilde{P}}(t) + \hat{D}^{\tilde{S}}(u)) - \right. \\ \left. - D_1^V(t) - (D_1^A(t) + \hat{D}_1^V(u)) \right] z,$$

$$A_3^L(s, t) = -D^S(t) + \frac{v}{m^2} \hat{D}^{\tilde{S}}(u) + (1 + \frac{2v}{m^2}) (D_1^V(t) + D_1^A(t)) + \hat{D}_1^V(u),$$

$$A_4^L(s, t) = e^{-2i\phi} \left[\frac{v+m^2}{m^2} D^S(t) - \hat{D}^P(u) + \frac{v}{m^2} D^{\tilde{P}}(t) - D_1^V(t) - D_1^A(t) - (1 + \frac{2v}{m^2}) \hat{D}_1^V(u) \right],$$

$$A_5^L(s, t) = \frac{e^{i\phi}}{4m} \left[-D^S(t) + \hat{D}^P(u) + D_1^V(t) + D_1^A(t) + \hat{D}_1^V(u) \right].$$

Die Imaginärteile dieser A_K^L für $v < v_0$, $t = -2v(1-z)$, $u = -2v(1+z)$ setzt man in die Projektionsformeln (4.40) ein und erhält damit die gewünschten $\alpha_K^J(v)$.

Von Interesse sind vor allem die ersten Partialwellen, weil für höhere Drehimpulse die Zentrifugalbarriere so groß ist, daß wir keine Bindungszustände mehr erwarten.

ten. Für $J=1$ und $J=2$ seien die $\alpha_k^J(\nu)$ explizit angegeben.

1) Pseudoskalar

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \alpha_2^0(\nu) &= \frac{1}{32\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m(A_1^L - A_2^L) P_0(z) dz \\
 &= \frac{1}{64\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[\left(\frac{\nu}{m_2} (D^S + \hat{D}^P) - \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} - \hat{D}^{\tilde{P}}) + \frac{4\nu}{m_2} D_1^V \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(1 + \frac{2\nu}{m_2}) (D_1^A - \hat{D}_1^V) + (2 + \frac{\nu}{m_2}) (D^S - \hat{D}^P) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}}) + 2(D_1^V + D_1^A + \hat{D}_1^V) \right) z \right] dz
 \end{aligned}
 \quad (4.50)$$

2) Skalar Die N/D-Gleichung wäre in diesem Fall eine Matrixgleichung, die aber zu einer einfachen Gleichung entartet, weil B_3^0 und B_2^0 verschwinden.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \alpha^0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\pi} \alpha_{11}^0(\nu) &= \frac{1}{32\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m(A_1^L + A_2^L) P_0 dz \\
 &= \frac{1}{64\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[-(2 + \frac{\nu}{m_2}) (D^S + \hat{D}^P) + \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1 + \frac{2\nu}{m_2}) D_1^V - 4(1 + \frac{\nu}{m_2}) (D_1^A - \hat{D}_1^V) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{m_2} (D^S + \hat{D}^P + D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}}) z \right] dz
 \end{aligned}
 \quad (4.51)$$

3) Vektor

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \alpha_{11}^1(\nu) &= \frac{1}{32\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m(A_1^L + A_2^L) P_1(z) dz \\
 &= \frac{1}{64\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[-(2 + \frac{\nu}{m_2}) (D^S + \hat{D}^P) + \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}}) + 2(1 + \frac{2\nu}{m_2}) D_1^V \right. \\
 &\quad \left. - 4(1 + \frac{\nu}{m_2}) (D_1^A - \hat{D}_1^V) \right) z + \frac{\nu}{m_2} (D^S - \hat{D}^P + D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}}) z^2 \Big] dz, \\
 \frac{1}{\pi} \alpha_{22}^1(\nu) &= \frac{1}{128\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left((A_3^L + A_4^L e^{2i\phi}) (1+z^2) + (A_3^L - A_4^L e^{2i\phi}) 2z \right) P_0^{0,2} dz \\
 &= \frac{1}{128\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[\frac{\nu}{m_2} (D^S - \hat{D}^P + D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{P}} + 2D_1^V + 2D_1^A - 2\hat{D}_1^V) (1+z^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (-2 + \frac{\nu}{m_2}) D^S + \hat{D}^P - \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} - \hat{D}^{\tilde{P}}) + 2(1 + \frac{\nu}{m_2}) (D_1^V + D_1^A + \hat{D}_1^V) 2z \right] dz \\
 \frac{1}{\pi} \alpha_{21}^1(\nu) &= \frac{1}{64\pi\nu} \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 J_m A_5^L e^{-i\phi} (1-z^2) P_0^{1,1} dz \\
 &= \frac{1}{64\pi\nu} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{4m} \int_{-1}^1 J_m \left[-D^S + \hat{D}^P + D_1^V + D_1^A + \hat{D}_1^V \right] (1-z^2) dz
 \end{aligned}
 \quad (4.52)$$

$$\alpha_{12} = 5 \alpha_{21}$$

4) Axialvektor mit negativer Ladungsparität

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \alpha_2^4(\nu) &= \frac{1}{32\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m(A_1^L - A_2^L) P_1(z) dz \\ (4.53) \quad &= \frac{1}{64\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[\left(\frac{\nu}{m_1} (D^S + \hat{D}^P) - \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} - \hat{D}^{\tilde{S}}) + \frac{4\nu}{m_1} D_1^V + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \frac{2\nu}{m_1}) (D_1^A - \hat{D}_1^V) \right) z + (2 + \frac{\nu}{m_2}) (D^S + \hat{D}^P) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{S}}) + 2 (D_1^V + D_1^A + \hat{D}_1^V) z^2 \right] dz ; \end{aligned}$$

5) Axialvektor mit positiver Ladungsparität

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \alpha_4^4(\nu) &= \frac{1}{128\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[(A_3^L - A_4^L e^{2i\phi}) (1+z^2) + (A_3^L + A_4^L e^{2i\phi}) z \right] P_0^{0,1} dz \\ (4.54) \quad &= \frac{1}{128\pi\nu} \int_{-1}^1 J_m \left[(-2 + \frac{\nu}{m_2}) D^S + \hat{D}^P - \frac{\nu}{m_2} (D^{\tilde{S}} - \hat{D}^{\tilde{S}}) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 + \frac{\nu}{m_1}) (D_1^V + D_1^A + \hat{D}_1^V) (1+z^2) + \frac{\nu}{m_2} (D^S - \hat{D}^P + \right. \\ &\quad \left. + D^{\tilde{S}} + \hat{D}^{\tilde{S}} + 2 (D_1^V + D_1^A - \hat{D}_1^V) z \right] dz. \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Integrationen elementar nicht mehr durchführbar sind, und daß zur weiteren Lösung der N/D-Gleichungen (4.38) umfangreiche numerische Rechnungen auf einer Rechenanlage notwendig werden, die den Rahmen der vorliegenden Arbeit übersteigen. Ob vektorielle oder axialvektorielle Bindungszustände zu Skalar und Pseudoskalar hinzukommen, kann erst an der Lösung entschieden werden. Die Gleichungen gelten auch für den Gitterraum, obwohl wir sie für eine drehinvariante Theorie abgeleitet haben, mit Ausnahme der Vektor-Gleichung, weil darin D-Wellen eingehen, die bei kubischer Symmetrie eine andere Gestalt haben.

4.5 Diskussion der N/D-Methode

Wir haben die Gleichung (4.38) zwar aufgestellt, aber noch nichts über ihre Lösbarkeit gesagt. Nach Lyth [32] gilt folgende Aussage: Seien $\mathfrak{S}$ und L reelle analy-

tische Funktionen im Intervall $0 \leq v < \infty$. Gesucht ist eine reell analytische Funktion in der aufgeschnittenen v -Ebene

$$(4.55) \quad F(v) = L(v) + R(v)$$

so daß R eine reell analytische Funktion mit einem Verzweigungsschnitt von 0 bis ∞ ist, die außerdem eine endliche Zahl von Polen aufweisen darf. R sei an den Endpunkten beschränkt durch $R < \text{const} \cdot v^{-p}, v \rightarrow 0$, $R < \text{const} \cdot v^q, v \rightarrow \infty$ für irgendwelche p, q , und F erfülle

$$(4.56) \quad \text{Im} \frac{1}{F(v)} = -g(v)$$

auf dem Schnitt. Dann existiert eine Lösung der Gestalt

$$(4.57) \quad F = e^{i\delta} \sin \delta / g$$

und kann durch Lösung einer N/D-Gleichung gewonnen werden, falls g und L von der Art sind, daß

$$(4.58) \quad 1) \quad g \sim v^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad v \rightarrow 0$$

$$g \sim v^\beta, \quad \beta > 0, \quad v \rightarrow \infty$$

und daß (für ganzes β)

$$2) \quad L(v) \sim \sum_{i=1}^A a_i v^{-i} + A \frac{\log v}{v} + \bar{L}(v)$$

$$(4.59) \quad \bar{L}(v) < \text{const} \cdot v^{-\mu-\kappa}, \quad \mu > 0$$

$$0 \leq A \leq 1$$

In unserem Fall ist (4.34) $g = \frac{v^{3/2}}{\sqrt{v+m^2}}$, so daß $\beta=1$ und $\alpha=\frac{3}{2}$ sind. $L(v)$ ist der Beitrag vom linken Schnitt, welcher durch (4.40) mit $A_k \rightarrow A_k^L$ gegeben ist. Zum Nachweis, daß $I(v)$ die Form (4.59) hat, betrachten wir die Schnittbelegung auf dem linken Schnitt, die durch die α_k^j aus (4.50) bis (4.54) gegeben sind. Die Funktionen D^j und $\hat{D}^j$ (4.45) und (4.47) haben eine Spektraldarstellung von der Form

$$(4.60) \quad D^j(t) = \int_S \frac{g(\sigma^2)}{\sigma^2 - t} d\sigma^2$$

wo das Spektrum S aus dem Intervall $[4m^2, \Lambda^2 + m^2]$ und einer möglicherweise vorhandenen Polstelle besteht. Wir bilden

den Imaginärteil von D^j und projizieren gemäß (4.50) bis (4.54). Zur Vereinfachung lassen wir die $\hat{D}^j(u)$ außer Betracht, die sich ebenso behandeln lassen. Dann haben wir ein Integral der Form

$$(4.61) \quad \alpha(v) = \frac{\pi}{v} \int \! \! \int d\sigma^2 (v \tilde{g}(\sigma^2) + \tilde{g}(\sigma^2)) \int_{-1}^1 P(z) d(t - \sigma^2) dz,$$

wo $P(z)$ ein Polynom in z ist und $\tilde{g}, \tilde{g}$ Spektralfunktionen mit dem Träger $\tilde{S}$ sind, der durch Vereinigung von Spektren S der verschiedenen D^j entstanden ist. Wir setzen $t = -2v(1-z)$ ein und führen die z -Integration aus

$$(4.62) \quad \alpha(v) = \frac{\pi}{2v^2} \int_{\tilde{S}[0, -4v]} d\sigma^2 (v \tilde{g}(\sigma^2) + \tilde{g}(\sigma^2)) P(1 + \frac{\sigma^2}{2v})$$

Für $v \rightarrow -\infty$ hat man eine Integration über ein festes Intervall und das Argument des Polynoms strebt gegen 1, so daß das asymptotische Verhalten

$$(4.63) \quad \alpha(v) = \frac{A}{v} + O\left(\frac{1}{v^2}\right), \quad v \rightarrow \infty$$

herauskommt. Die Funktion L (4.59) gewinnt man durch den Cauchyschen Satz

$$(4.64) \quad \begin{aligned} L(v) &= \int_{-\infty}^{-|v|} dv' \frac{\alpha(v')}{v' - v} = A \int_{-\infty}^{-|v|} \frac{dv'}{v'(v' - v)} + \int_{-\infty}^{-|v|} \frac{dv'}{v' - v} O(v'^{-2}) \\ &= \frac{A}{v} \ln\left(1 + \frac{v}{|v|}\right) + \frac{a}{v} + O(v^{-1-\epsilon}). \end{aligned}$$

Damit ist $L(v)$ wegen $\beta=1$ von der Gestalt (4.59) und es bleibt noch zu zeigen, daß $0 \leq A \leq 1$ ist, was hier aber nicht mehr durchgeführt werden soll. Man überlegt sich aber anhand von (4.45) und (4.47) mit (2.35), daß z.B. $D^5(t)$ proportional Λ^{-2} ist und für große t sich wie t^{-1} verhält (2.8). Es wird aber in (4.62) höchstens über ein Intervall der Länge $\approx \Lambda^2$ integriert, woraus wir entnehmen, daß wir die richtige Größe von A erwarten dürfen. Desgleichen bedarf es bezüglich der Eindeutigkeit noch eingehender Diskussion und wir verweisen auf Ref. [32].

Es ist klar, daß die N/D-Gleichungen, wie wir sie aufgestellt haben, nur eine grobe Näherung für die Amplituden liefern können, weil wir angenommen haben, daß nur Zweiteilchen-Prozesse eine Rolle spielen. Trotzdem be-

deuten die Lösungen B_k^j einen Fortschritt gegenüber der Kettennäherung, weil wir neben der Teilchen-Antiteilchen-Streuung auch die Teilchen-Teilchen-Streuung berücksichtigten, was bei einer störungstheoretischen Behandlung nicht so leicht zu bewerkstelligen wäre. Nach Frye und Warnock [23] lassen sich aber auch Mehrteilchenprozesse auf eine pauschale Weise in die N/D-Gleichungen einbeziehen. Sind neben dem Zweiteilchenkanal auch noch Mehrteilchenkanäle offen, so werden die Streuphasen komplex; die Inelastizität

$$(4.65) \quad \eta_j(v) = e^{-2i\text{Im } \delta_j^j(v)}, \quad \delta_j^j(v) \text{ Streuphase}$$

ist daher ein Maß für die Stärke der Mehrteilchenprozesse. Wenn $\eta_j(v)$ bekannt ist, kann man ähnlich wie im elastischen Fall N/D-Gleichungen aufstellen und die elastische Streuamplitude berechnen, welche ja die gesuchten Pole enthält. Die Aufgabe, η_j zu bestimmen und die Inelastizität auf dem linken Schnitt zu berücksichtigen, könnte sich als wesentlich einfacher erweisen als die volle Lösung von Integralgleichungen vom Typ (4.2), so daß die N/D-Methode von entscheidendem Vorteil für eine gute Approximation der Bosonenmassen wäre.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp und Herrn Dr. F. Wahl sage ich Dank für die Anregung und Unterstützung der Arbeit. Viele eingehende Diskussionen, die oft erst den Zugang zu den Problemen der Feldtheorie öffneten, habe ich mit Herrn G. Friedel ausgefochten.

Die Finanzierung der Arbeit erfolgte mit Hilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Die numerischen Rechnungen konnten an der Rechenanlage des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt werden.

Anhang I: Normalordnung des Hamiltonoperators

Wenn wir im Vierfermion-Operator (1.14) die Anteile positiver und negativer Energie explizit schreiben, so bekommen wir insgesamt sechzehn Terme

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi = \bar{\psi}^{(+)} \gamma^\mu \gamma_5 \psi^{(+)} \bar{\psi}^{(+)} \gamma_\mu \gamma_5 \psi^{(+)} + \bar{\psi}^{(+)} \gamma^\mu \gamma_5 \psi^{(+)} \bar{\psi}^{(-)} \gamma_\mu \gamma_5 \psi^{(-)} + \\ + \dots + \bar{\psi}^{(-)} \gamma^\mu \gamma_5 \psi^{(-)} \bar{\psi}^{(-)} \gamma_\mu \gamma_5 \psi^{(-)}.$$

Davon sind elf Kombinationen nicht in Normalordnung. Wir tauschen sie in die richtige Reihenfolge und erhalten dabei Beiträge von den Antikommutatoren, welche zu Teilchenzahl-Operatoren und c-Zahlen führen. Symbolisch geschrieben ergibt das unter Verwendung von Gl. (1.13) (runde Klammern sind Produkte von Feldoperatoren)

$$\begin{pmatrix} +++- \\ 1234 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ++ \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ++ \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +++- \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ++ \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +--- \\ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ++ \\ 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +--- \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -+ \\ 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -+ \\ 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +, - \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +--- \\ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -+ \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -+ \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 34 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} -+ \\ 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +, - \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +--- \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -+ \\ 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -++- \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -+ \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -++- \\ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -+ \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +---- \\ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -- \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -- \\ 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +---- \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -- \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -++- \\ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -+++ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -- \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +, - \\ 34 \end{pmatrix}$$

Die Viererklammern rechts sind jetzt normalgeordnet. Wir fassen die Zusatzglieder zusammen.

$$1) : (1,2): \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 3 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\} + : (23): \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 1 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\} + : (14): \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} + : (34): \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

$$2) \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 1 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} +, - \\ 3 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\}$$

Wir setzen (1.13) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 1) & (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} [: \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta : \{ \bar{\psi}_\gamma^{(+)} , \psi_\delta^{(-)} \} + : \psi_\beta \bar{\psi}_\gamma : \{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)} , \psi_\delta^{(-)} \} \\ & \quad + : \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta : \{ \bar{\psi}_\beta^{(+)} , \psi_\gamma^{(-)} \} + : \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta : \{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)} , \psi_\beta^{(-)} \}] \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [: \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta : (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \underbrace{Sp(\frac{\not{p}-m_0}{2E} \gamma_\mu \gamma_5)}_{=0} - : \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta : (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} \underbrace{Sp(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}-m_0}{2E})}_{=0}] \\ & \quad + : \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta : (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\delta} \underbrace{Sp(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}+m_0}{2E} \gamma_\mu \gamma_5)}_{=0} + : \bar{\psi}_\gamma \psi_\beta : (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\beta} \underbrace{Sp(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}-m_0}{2E})}_{=0}] \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} : \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta : (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \frac{2m_0}{2E} \gamma_\mu \gamma_5 \\ & = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{4m_0}{E} : \bar{\psi} \psi : \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} [\{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)} , \psi_\beta^{(-)} \} \{ \bar{\psi}_\gamma^{(+)} , \psi_\delta^{(-)} \} + \{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)} , \psi_\delta^{(-)} \} \{ \bar{\psi}_\gamma^{(-)} , \psi_\beta^{(+)} \}] \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} [\underbrace{Sp(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}-m_0}{2E}) Sp(\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{p}'-m_0}{2E'})}_{=0} + \\ & \quad + Sp(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}+m_0}{2E} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{p}'+m_0}{2E'})] \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{4m_0^2 - 2p \cdot p'}{E E'}. \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (1.14) abgeleitet.

Anhang II: Berechnung der Teilintegrale des Vakuum- Polarisations-Graphen

Nach 2.1 haben wir folgende Integrale zu berechnen:

$$J_3(k^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}$$

$$= \frac{1}{m^2} J_{4\mu}^{\mu}(k) - \frac{1}{m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \equiv \frac{1}{m^2} (J_{4\mu}^{\mu}(k) - I(k^2))$$

$$J_4^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}$$

$$J_5^{\mu\nu}(k) - J_5^{\nu\mu}(0) \equiv J_7^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{p^{\mu} p^{\nu}}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)} - \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{(p^2 - m^2)^3} \right]$$

$$J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) - J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0) \equiv J_8^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{p^{\mu} p^{\nu} p^{\kappa} p^{\lambda}}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} - \frac{p^{\mu} p^{\nu} p^{\kappa} p^{\lambda}}{(p^2 - m^2)^4} \right]$$

$$J_1(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^2} = \frac{d}{dm^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\theta(p^2 + \Lambda^2)}{p^2 - m^2} \equiv \frac{d}{dm^2} J$$

$$J_2^{\mu\nu}(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^{\mu} p^{\nu} \theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^2}$$

$$J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^{\mu} p^{\nu} p^{\kappa} p^{\lambda} \theta(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 - m^2)^4}$$

1) Berechnung des Integrals $I(k^2)$

Durch Anwendung der Feynmanschen Methode [12] wird der Nenner in den Exponenten gebracht und das Integral auf einfache Parameterintegrationen zurückgeführt.

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} =$$

$$= (-i)^3 \int_0^1 dz_1 dz_2 dz_3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i[z_1(p+k)^2 + z_2(p-k)^2 + z_3 p^2 - \Sigma z_i m^2]}$$

$$= (i)^3 \int_0^1 dz_1 dz_2 dz_3 \left(\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i \Sigma z_i p^2} \right) e^{i \left[(x - \frac{y}{\Sigma z_i}) k^2 - m^2 \Sigma z_i \right]}$$

mit

$$x := z_1 + z_2, \quad y := z_1 - z_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-i)^3}{16\pi^2 i} \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{(\sum z_i)^2} e^{i[(x - \frac{y^2}{\sum z_i})k^2 - m^2 \sum z_i]} \quad , \quad (p\text{-Integration}) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{(\sum z_i)^2} \delta(1 - \frac{\sum z_i}{\lambda}) e^{i[(x - \frac{y^2}{\sum z_i})k^2 - m^2 \sum z_i]} \quad , \quad (1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(1 - \frac{\sum z_i}{\lambda})) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda \int_0^{\frac{1}{\lambda}} dz_1 dz_2 e^{i\lambda((x-y^2)k^2 - m^2)} \quad , \quad (z_i \rightarrow \lambda z_i, z_3\text{-Integration}) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dy \int_y^1 dx \frac{1}{(x-y^2)k^2 - m^2} \quad , \quad (\lambda\text{-Integration}) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dy [\ln((1-y^2)k^2 - m^2) - \ln(y(1-y)k^2 - m^2)] , \\
 &= \frac{2i}{16\pi^2 k^2} \left[-\int_0^1 dy \frac{y^2}{y^2 - \frac{k^2 - m^2}{k^2}} + \int_0^1 dz \frac{z^2}{z^2 - \frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} \right] \quad , \quad (part. Integration \quad y = \frac{1}{2}(1-z)) \\
 &= \frac{2i}{16\pi^2 k^2} \left[-\frac{k^2 - m^2}{k^2} \int_0^1 dz \frac{1}{z^2 - \frac{k^2 - m^2}{k^2}} + \frac{k^2 - 4m^2}{k^2} \int_0^1 dz \frac{1}{z^2 - \frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} \right] \\
 &=: \frac{2i}{16\pi^2 k^2} [L_1(k^2) - L_2(k^2)]
 \end{aligned}$$

Berechnung von L_1 : $\int_0^1 dz \frac{1}{z^2 - a^2}$

1. Fall $a^2 < 0$, $b^2 = -a^2$, $\int dz \frac{1}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{1}{b}$

2. Fall $0 \leq a^2 \leq 1$, $\int dz \frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int dz \left(\frac{1}{z-a-i\epsilon} - \frac{1}{z+a+i\epsilon} \right)$

(da die Integrationsvorschrift $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ einzuhalten ist [12], folgt $a \rightarrow \sqrt{(1 - \frac{m^2}{k^2}) + i\epsilon} = a + i\epsilon$.)

$$= \frac{1}{2a} (\ln \frac{1-a}{1+a} + i\pi)$$

3. Fall $a^2 > 1$ $\int dz \frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-1}{a+1}$.

Damit lautet L_1 :

1) $\sqrt{\frac{m^2 - k^2}{k^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k^2}{m^2 - k^2}}$

2) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{k^2}} \left(\ln \frac{\sqrt{k^2} + \sqrt{k^2 - m^2}}{\sqrt{k^2} - \sqrt{k^2 - m^2}} - i\pi \right)$

$$3) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{k^2 - m^2} + \sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2 - m^2} - \sqrt{k^2}}.$$

ℓ_2 erhält man, wenn man in ℓ_1 m^2 durch $4m^2$ ersetzt.

2) Berechnung von $J_4^{\mu\nu}(k)$

$$\begin{aligned} J_4^{\mu\nu}(k) &= (-i)^4 \int dz_1 \dots dz_4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^\mu p^\nu e^{i(z_1(p+k)^2 + z_2(p-k)^2 + (z_3+z_4)p^2 - \sum z_i m^2)} \\ &= \int dz_1 \dots dz_4 e^{i((x - \frac{y^2}{\sum z_i})k^2 - \sum z_i m^2)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^\mu p^\nu - \frac{y^2}{(\sum z_i)^2} k^\mu k^\nu) e^{i\sum z_i p^2} \\ &= \int dz_1 \dots dz_4 e^{i((x - \frac{y^2}{\sum z_i})k^2 - \sum z_i m^2)} \frac{1}{16\pi^2 (\sum z_i)^3} \left(\frac{ig^{\mu\nu}}{2\sum z_i} + \frac{y^2}{(\sum z_i)^2} k^\mu k^\nu \right) \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int dx (1-x) \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + \lambda y^2 k^\mu k^\nu \right) e^{i\lambda(x-y^2)k^2 - m^2} \end{aligned}$$

(Der Faktor $(1-x)$ kommt von der z_4 -Integration.)

Die weitere Integration geht analog zu 1) und man erhält

$$\begin{aligned} J_4^{\mu\nu}(k) &= \frac{i}{16\pi^2 k^4} \left[-\frac{1}{3} g^{\mu\nu} \left(\frac{k^2}{4} + (m^2 - k^2) \ell_1 - (m^2 - k^2) \ell_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} (k^2 + (m^2 - k^2) \ell_1 - \frac{4m^4 - 8m^2 k^2 + k^4}{4m^2 - k^2} \ell_2) \right] \end{aligned}$$

3) Berechnung von $J_5^{\mu\nu}(k)$

Wir haben genau das gleiche Integral wie bei $J_4^{\mu\nu}$, nur entfällt die z -Integration, weil ein Nenner $(p^2 - m^2)$ fehlt.

$$\begin{aligned} J_5^{\mu\nu}(k) - J_5^{\mu\nu}(0) &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^4 p}{\lambda} \int dy dx (e^{i\lambda((x-y^2)k^2 - m^2)} - e^{-i\lambda m^2}) \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + \lambda y^2 k^\mu k^\nu \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int dy dx \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \ln \left| \frac{(-m^2)}{(x-y^2)k^2 - m^2} \right| + y^2 k^\mu k^\nu \left(\frac{i}{(x-y^2)k^2 - m^2} + \frac{i}{m^2} \right) \right] \end{aligned}$$

nach einer partiellen Integration des ersten Terms geht die weitere Rechnung wieder entsprechend zu 1)

$$\begin{aligned} J_5^{\mu\nu}(k) &= -\frac{1}{16\pi^2 \cdot 2k^2} \left[g^{\mu\nu} \left(-\frac{4}{3} k^2 - \frac{4}{3} (m^2 - k^2) \ell_1 + \frac{1}{3} (4m^2 - k^2) \ell_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \left(\frac{4}{3} k^2 + \frac{2}{3} (m^2 - k^2) \ell_1 - \frac{1}{3} (m^2 - k^2) \ell_2 \right) \right] \end{aligned}$$

4) Berechnung von $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k)$

Formal ist

$$J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) = \int dz_1 \dots dz_4 e^{i((x - \frac{y^2}{\sum z_i})k^2 - \sum z_i m^2)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^\mu - \frac{y}{\sum z_i} k^\mu) \cdot (p^\lambda - \frac{y}{\sum z_i} k^\lambda) e^{i\sum z_i p^2}.$$

Mit

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^\mu p^\nu p^\kappa p^\lambda e^{i \Sigma z; p^2} = \frac{1}{16\pi^2 i (\Sigma z;)^2} \frac{(-1)}{4 (\Sigma z;)^2} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa})$$

gibt die Ausführung der p-Integration:

$$J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) = \frac{-i}{16\pi^2} \int dz_1 \dots dz_4 e^{i((x - \frac{y^2}{\Sigma z;})k^2 - m^2 \Sigma z;)} \left\{ \frac{-1}{4 (\Sigma z;)^4} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) + \frac{1}{(\Sigma z;)^2} \frac{i}{2 \Sigma z;} \frac{y^2}{(\Sigma z;)^2} (g^{\mu\nu} k^\kappa k^\lambda + g^{\mu\kappa} k^\nu k^\lambda + g^{\mu\lambda} k^\nu k^\kappa + g^{\nu\kappa} k^\mu k^\lambda + g^{\nu\lambda} k^\mu k^\kappa + g^{\kappa\lambda} k^\mu k^\nu) + \frac{1}{(\Sigma z;)^2} \frac{y^4}{(\Sigma z;)^4} k^\mu k^\nu k^\kappa k^\lambda \right\}.$$

$J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$ kann man nach Einführung der λ -Integration wie bei $J_4^{\mu\nu}$ abziehen und nach elementarer aber langwieriger Rechnung, die ebenso wie in den vorangehenden Punkten erfolgt, lautet das Resultat:

$$4 k_\kappa k_\lambda J_8^{\mu\nu\kappa\lambda}(k) = \frac{i}{16\pi^2} \left[g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3} k^2 + \frac{2}{3} m^2 - \frac{1}{3} (k^2 + 2m^2) \ell_2 \right) + 2 \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \left(\frac{4}{3} k^2 - \frac{1}{3} m^2 - \frac{1}{3} \frac{k^\nu k^\lambda k^2 m^2 + 4 m^4}{k^2 - 4 m^2} \ell_2 \right) \right].$$

5) Berechnung von J

$$J = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\theta(p^2 + \Lambda^2)}{p^2 - m^2} = (-i) \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \theta(p^2 + \Lambda^2) e^{iz(p^2 - m^2)}$$

Wir setzen $\hat{p}_0 := -ip_0$, $\hat{p} = p$, $\hat{p}^2 = \hat{p}^2 + \hat{p}^2$, $d\hat{p}_0 = i d\hat{p}_0$ und verschieben den $\hat{p}_0$ -Integrationsweg in die reelle Achse.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty - i\epsilon''} dz \int_{-\infty}^\infty \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \theta(\Lambda^2 - \hat{p}^2) e^{-iz(\hat{p}^2 + m^2)} \\ &= \int_0^{\infty - i\epsilon''} dz \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha - i\epsilon'} e^{i\alpha \Lambda^2} \int \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} e^{-i(\alpha + z)\hat{p}^2} e^{-iz m^2} \\ &= \int_0^{\infty - i\epsilon''} dz \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha - i\epsilon'} e^{i\alpha \Lambda^2 - iz m^2} \frac{(-1)}{16\pi^2 (z + \alpha)^2} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dz e^{-iz m^2} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha - i\epsilon'} \frac{1}{(\alpha + (z - i\epsilon''))^2} e^{i\alpha \Lambda^2} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dz e^{-iz m^2} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} e^{-iz \Lambda^2} - \frac{i \Lambda^2}{z} e^{-iz \Lambda^2} \right] \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right] = -\frac{i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

6) Berechnung von $J_2^{\mu\nu}(0)$

$$\begin{aligned}
 J_2^{\mu\nu}(0) &= (-i)^2 \int d\lambda \cdot \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^\mu p^\nu \theta(p^2 + \Lambda^2) e^{i\lambda p^2 - m^2} \quad (\text{nach (3.12)}) \\
 &= -i \int d\lambda \cdot \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu i^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \theta(\Lambda^2 - \hat{p}^2) e^{-i\lambda(\hat{p}^2 + m^2)} \\
 &= -\frac{i}{2\pi} i^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \int d\lambda \cdot \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} e^{i(\alpha\Lambda^2 - \lambda m^2)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu e^{-i\hat{p}^2(\lambda + \alpha)} \\
 &= \frac{-i}{4\pi \cdot 16\pi^2} i^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \delta_{\mu\nu} \int d\lambda \cdot \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \frac{1}{(\alpha + \lambda)^3} e^{i(\alpha\Lambda^2 - \lambda m^2)} \\
 &= \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \Lambda^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{1}{2} m^2 \right] \\
 &= \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \Lambda^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2} m^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

7) Berechnung von $J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0)$

$$\begin{aligned}
 J_6^{\mu\nu\kappa\lambda}(0) &= \frac{1}{6} \int_0^\infty dz z^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^\mu p^\nu p^\kappa p^\lambda \theta(p^2 + \Lambda^2) e^{iz(p^2 - m^2)} \quad (\text{nach (3.12)}) \\
 &= \frac{i}{6} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dz z^3 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} i^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0} + \delta_{\kappa 0} + \delta_{\lambda 0}} \times \\
 &\quad \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \hat{p}^\kappa \hat{p}^\lambda e^{-i(z+\alpha)\hat{p}^2} e^{i(\alpha\Lambda^2 - zm^2)} \\
 &= \frac{i}{6} \frac{1}{2\pi i} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \frac{1}{4 \cdot 16\pi^2} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \frac{z^3}{(z+\alpha)^4} e^{i(\alpha\Lambda^2 - zm^2)} \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{11}{6} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Diese Integrale setzt man in (2.2) bis (2.7) ein und erhält aus (1.54) die Funktionen (2.8).

Anhang III: Die Gitterraum-Integrale

$$1) J(0) = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \Lambda^2 \int_0^\infty dz e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})} I_0^3(z^2)$$

$$2) J_2^{ii}(0) = \frac{-ig^{ii}}{4\sqrt{2\pi}} \Lambda^2 \int_0^\infty dz 2z^2 (I_0(z^2) - I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

$$3) J_6^{oooo}(0) = \frac{ig^{oo}g^{ii}}{24\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^4 (I_0(z^2) - I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})} = \frac{1}{12} \frac{d}{dm^2} J_2^{ii}(0)$$

$$4) J_6^{iijj}(0) = \frac{ig^{ii}g^{jj}}{12\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^6 (I_0(z^2) - I_1(z^2))^2 I_0(z^2) e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

$$5) J_6^{oooo}(0) = \frac{ig^{oo}g^{oo}}{16\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^2 I_0^3(z^2) e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})} = -\frac{1}{8} \frac{d}{dm^2} J(0)$$

$$6) J_6^{iiii}(0) = \frac{ig^{ii}g^{ii}}{12\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dz z^4 (2z^2 I_0(z^2) - (2z^2 + 1) I_1(z^2)) I_0^2(z^2) e^{-z^2(3+\frac{m^2}{\Lambda^2})}$$

Wir teilen das Integrationsgebiet auf $\int_0^a \rightarrow \int_0^a + \int_a^\infty$ und zwar

so, daß im Intervall $[a, \infty)$ die asymptotische Entwicklung für die Besselfunktionen ausreichend genaue Werte liefert. Bei der Integration im Intervall $[0, a]$ entwickeln wir die Exponentialfunktion $e^{-z^2 m^2 / \Lambda^2}$ und berechnen unsere Integrale bis zur Ordnung $(\frac{m^2}{\Lambda^2})^0$. Dazu benötigen wir die folgenden Integrale

$$J(0) \rightarrow J^{(0)}(a) := \int_0^a dz I_0^3 e^{-3z^2}, \quad J^{(2)}(a) := \int_0^a dz z^2 I_0^3 e^{-3z^2}$$

$$J_2^{ii}(0) \rightarrow J^{(3)}(a) := \int_0^a dz 2z^2 (I_0 - I_1) I_0^2 e^{-3z^2}, \quad J^{(4)}(a) := \int_0^a dz 2z^4 (I_0 - I_1) I_0^2 e^{-3z^2}$$

$$J_6^{iijj}(0) \rightarrow J^{(5)}(a) := \int_0^a dz z^6 (I_0 - I_1)^2 I_0 e^{-3z^2}$$

$$J_6^{iiii}(0) \rightarrow J^{(6)}(a) := \int_0^a dz z^4 (2z^2 I_0 - (2z^2 + 1) I_1) I_0^2 e^{-3z^2}$$

Diese Ausdrücke sind für eine numerische Behandlung geeignet. Im Intervall $[a, \infty)$ benötigen wir die asymptotischen Entwicklungen der Integranden. Für die Besselfunktionen gilt [34]

$$I_0(z^2) \sim \frac{e^{z^2}}{\sqrt{2\pi} z} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{9}{64} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{225}{512} \frac{1}{z^6} + \frac{1}{4!} \frac{225 \cdot 49}{16 \cdot 256} \frac{1}{z^8} + \dots \right)$$

$$I_1(z^2) \sim \frac{e^{z^2}}{\sqrt{2\pi} z} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{1}{z^2} - \frac{15}{128} \frac{1}{z^4} - \frac{105}{1024} \frac{1}{z^6} - \frac{4725}{32768} \frac{1}{z^8} - \dots \right)$$

Die Integranden lauten

$$I_0^3(z^2) \sim \frac{e^{3z^2}}{(2\pi)^{3/2} z^3} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{33}{128} \frac{1}{z^4} + \frac{381}{1024} \frac{1}{z^6} + \frac{13319}{32768} \frac{1}{z^8} + \dots \right)$$

$$2z^2(I_0 - I_1)I_0^2 \sim \frac{e^{3z^2}}{(2\pi)^{3/2} z^3} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{77}{128} \frac{1}{z^4} + \frac{534}{512} \frac{1}{z^6} + \dots \right)$$

$$z^6(I_0 - I_1)^2 I_0 \sim \frac{1}{4} \frac{e^{3z^2}}{(2\pi)^{3/2} z} \left(1 + \frac{7}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{129}{128} \frac{1}{z^4} + \frac{1007}{1024} \frac{1}{z^6} + \dots \right)$$

$$z^4(2z^2 I_0 - (2z^2 - 1)I_1)I_0^2 \sim \frac{3}{4} \frac{e^{3z^2}}{(2\pi)^{3/2} z} \left(1 + \frac{7}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{365}{256} \frac{1}{z^4} + \dots \right)$$

$$\eta) J(0) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Lambda^2 \left[J^{(1)}(a) - \frac{m^2}{\Lambda^2} J^{(2)}(a) + \int_a^\infty dz I_0^3(z^2) e^{-(z + \frac{m^2}{\Lambda^2})z^2} \right]$$

Im letzten Integral setzen wir die asymptotische Entwicklung ein und substituieren

$$\int_a^\infty dx \frac{1}{x^{2n+1}} e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} x^2} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^\infty \frac{dz}{z^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} z}$$

Darauf formen wir durch partielle Integration im

$$\begin{aligned} \int_{a^2}^\infty \frac{dz}{z^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} z} &= \frac{(v-2)!}{(v-1)!} \frac{e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} a^2}}{a^{2(v-1)}} - \frac{m^2}{\Lambda^2} \frac{(v-3)!}{(v-1)!} \frac{e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} a^2}}{a^{2(v-2)}} + \dots \\ &\dots + (-1)^{v-2} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{v-2} \frac{1}{(v-1)!} \frac{e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} a^2}}{a^2} + (-1)^{v-1} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{v-1} \frac{1}{(v-1)!} \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} z} \end{aligned}$$

Der letzte Term ist ein Exponentialintegral, das die logarithmischen Divergenzen beisteuert. Wir sammeln die Potenzen von $\frac{m^2}{\Lambda^2}$ bis zur ersten Ordnung und finden

$$\begin{aligned} J(0) &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Lambda^2 \left[J^{(1)}(a) - \frac{m^2}{\Lambda^2} J^{(2)}(a) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \Lambda^2 \left[f_1(a) - \frac{m^2}{\Lambda^2} \int_{a^2}^\infty \frac{dz}{z} e^{-\frac{m^2}{\Lambda^2} z} - \frac{m^2}{\Lambda^2} f_2(a) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left[-\Lambda^2 2K_1 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + m^2 2K_2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \end{aligned}$$

mit

$$2K_1 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{2}} J^{(1)}(a) + f_1(a), \quad 2K_2 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{2}} J^{(2)}(a) + f_2(a) - C - \ln(a^2)$$

$c = 0,5772$ Eulersche Konstante

$$f_1(a) = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{1}{a^2} + \frac{11}{128} \frac{1}{a^4} + \frac{281}{4096} \frac{1}{a^6} + \dots \right)$$

$$f_1(a) = (1 + \frac{3}{8} \frac{1}{a^2} + \frac{33}{256} \frac{1}{a^4} + \frac{1}{3} \frac{284}{1024} \frac{1}{a^6} + \dots)$$

Die Konstanten K_i sind, soweit die asymptotische Entwicklung Gültigkeit hat ($a^2 \gg 10$), von a unabhängig

$$\begin{aligned} 2) \quad J_2^{ii}(0) &= -\frac{i g^{ii}}{4\sqrt{12}\pi} \Lambda^2 [J^{(3)}(a) - \frac{m^2}{\Lambda^2} J^{(4)}(a) + \int_a^\infty dz z^2 (I_0 - I_1) I_0^2 e^{-(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})z^2}] \\ &= \frac{i g^{ii}}{32\pi^2} [-\Lambda^2 2K_3 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + m^2 2K_4] \end{aligned}$$

$$2K_3 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{12}} J^{(3)}(a) + f_3(a), \quad 2K_4 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{12}} J^{(4)}(a) + f_4(a) - C - \ln(a^2)$$

$$f_3(a) = \frac{1}{a^2} (1 + \frac{5}{16} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{77}{128} \frac{1}{a^4} + \frac{1}{4} \frac{534}{512} \frac{1}{a^6} + \dots)$$

$$f_4(a) = 1 + \frac{5}{8} \frac{1}{a^2} + \frac{77}{256} \frac{1}{a^4} + \frac{1}{3} \frac{534}{512} \frac{1}{a^6} + \dots$$

4) Die beiden letzten Integrale divergieren logarithmisch, deshalb braucht man nur die nullte Ordnung in $\frac{m^2}{\Lambda^2}$

$$\begin{aligned} J_6^{ijij}(0) &= \frac{i g^{ii} g^{jj}}{12 \sqrt{12}\pi} [J^{(6)}(a) + \int_a^\infty dz z^6 (I_0 - I_1)^2 I_0 e^{-(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})z^2}] \\ &= \frac{i g^{ii} g^{jj}}{12 \cdot 4\pi^2} [\frac{1}{8} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + K_5] \end{aligned}$$

$$K_5 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{12}\pi} J^{(5)}(a) + \frac{1}{4} (f_5(a) - C - \ln a^2)$$

$$f_5(a) = \frac{1}{a^2} (\frac{7}{8} + \frac{129}{256} \frac{1}{a^2} + \frac{668}{1024} \frac{1}{a^4} + \dots)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad J_6^{iiii}(0) &= \frac{i g^{ii} g^{ii}}{12 \sqrt{12}\pi} [J^{(6)}(a) + \int_a^\infty dz z^4 (2z^2 I_0 - (2z^2 + 1) I_1) I_0^2 e^{-(3 + \frac{m^2}{\Lambda^2})z^2}] \\ &= \frac{i g^{ii} g^{ii}}{12 \cdot 4\pi^2} [\frac{3}{8} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + K_6] \end{aligned}$$

$$K_6 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{12}\pi} J^{(6)}(a) + \frac{3}{8} (f_6(a) - C - \ln a^2)$$

$$f_6(a) = \frac{1}{a^2} (\frac{7}{8} + \frac{365}{512} \frac{1}{a^2} + \dots)$$

Die Konstanten $K_1, \dots, K_6$ wurden numerisch bestimmt und sind in (3.27) angegeben. Die Integrale 3) und 5) werden durch Differenzieren ermittelt.

Anhang IV: Berechnung der Helizitäts-Amplituden

1) Behandlung der q^μ -Glieder in den D^{μ}

Teilchen-Antiteilchen-Streuung:

Aus (4.41) (vgl. auch den zugehörigen Graphen) und (4.45) folgt, weil die äußeren Linien auf der Massenschale liegen ($q \equiv q_t$)

$$\begin{aligned} V: \frac{1}{q^2} \bar{u}_3 \not{A} u_1 \bar{v}_2 \not{A} v_4 &= \frac{1}{q^2} \bar{u}_3 (-\not{p}_3 + \not{p}_1) u_1 \bar{v}_2 (\not{p}_2 - \not{p}_4) v_4 = \\ &= \frac{1}{q^2} \bar{u}_3 (-m+m) u_1 \bar{v}_2 (-m+m) v_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A: \frac{1}{q^2} \bar{u}_3 \not{A} \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{A} \not{p}_5 v_4 &= \frac{1}{q^2} \bar{u}_3 (-\not{p}_3 \not{p}_5 - \not{p}_5 \not{p}_3) u_1 \bar{v}_2 (-\not{p}_2 \not{p}_5 - \not{p}_5 \not{p}_4) v_4 \\ &= -\frac{4m^2}{q^2} \bar{u}_3 \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_5 v_4 \end{aligned}$$

$$AP+PA: \frac{1}{4m} (\bar{u}_3 \not{A} \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_5 v_4 - \bar{u}_3 \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{A} \not{p}_5 v_4) = -\bar{u}_3 \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_5 v_4$$

Der $q^\mu q^\nu$ -Term von $D^{\mu\nu}$ verschwindet, wogegen der $q^\mu q^\nu$ -Term von $D^{\mu\nu}$ und $D^{AP\mu}$ zum Pseudoskalar beitragen, was in (4.48) zur Definition von $D^{\mathcal{P}}(t)$ führt.

Teilchen-Teilchen-Streuung:

Ebenso gilt mit (4.46) (vgl. Zeichnung) und (4.47)

$$\begin{aligned} \hat{V}: u_4^T B \not{A} u_1 \bar{v}_2 \not{A} B^T \bar{u}_3^T &= u_4^T B (-\not{p}_4 + \not{p}_1) u_1 \bar{v}_2 (-\not{p}_2 + \not{p}_3) B^T \bar{u}_3^T \\ &= u_4^T (-\not{p}_4^T B + B \not{p}_1) u_1 \bar{v}_2 (-\not{p}_2^T B^T + B^T \not{p}_3^T) \bar{u}_3^T \\ &= 4m^2 u_4^T B u_1 \bar{v}_2 B^T \bar{u}_3^T \end{aligned}$$

$$\hat{V} \hat{S} + \hat{S} \hat{V}: \frac{1}{4m} (u_4^T B \not{A} u_1 \bar{v}_2 B^T \bar{u}_3^T + u_4^T B u_1 \bar{v}_2 \not{A} B^T \bar{u}_3^T) = u_4^T B u_1 \bar{v}_2 B^T \bar{u}_3^T$$

Der $\hat{q}^\mu \hat{q}^\nu (= q_u^\mu q_u^\nu)$ -Term von $\hat{D}^{\mu\nu}(u)$ und $\hat{D}^{\nu\mu}(u)$ tragen hier zum Skalar bei und wir definieren deshalb in (4.48) $\hat{D}^{\mathcal{S}}(u)$. Damit sind bis auf skalare Faktoren in (4.41) die Elemente

$\bar{u}_3 u_1 \bar{v}_2 v_4$, $\bar{u}_3 \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_5 v_4$, $\bar{u}_3 \not{p}^\mu u_1 \bar{v}_2 \not{p}_\mu v_4$, $\bar{u}_3 \not{p}^\mu \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_\mu \not{p}_5 v_4$ zu berechnen und in (4.46)

$$u_4^T B u_1 \bar{v}_2 B^T \bar{u}_3^T, u_4^T B \not{p}_5 u_1 \bar{v}_2 \not{p}_5 B^T \bar{u}_3^T, u_4^T B \not{p}^\mu u_1 \bar{v}_2 \not{p}_\mu B^T \bar{u}_3^T.$$

2) Der Phasenfaktor $e^{i(\lambda-\mu)\phi}$

Wir schreiben auch die Diracmatrizen als direktes Produkt von 2×2 -Matrizen entsprechend zu den Gleichungen (4.42) bis (4.44)

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \underline{\sigma} \\ (A) \quad \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \quad B = -i\sigma^{31} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_2 \\ \gamma^0 \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \quad , \quad \underline{\gamma} \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \underline{\sigma} \end{aligned}$$

Der zweite Faktor wirkt auf die χ -Spinoren und zwar gilt

$$\sigma_1 \chi_\lambda = -\chi_{-\lambda}, \quad \sigma_2 \chi_\lambda = i(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \chi_{-\lambda}, \quad \sigma_3 \chi_\lambda = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \chi_\lambda$$

Mit dieser Darstellung ist es leicht, die ϕ -abhängigen Faktoren von $R_{\phi, \theta, -\phi}$ Gl. (4.45) aus den Matrixelementen herauszuziehen. Wegen (4.45) haben wir

$$\chi_{\lambda'}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda''} = e^{i(\lambda''-\lambda')\phi} \chi_{\lambda'}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda''}$$

Aus diesem Grunde erhalten wir bei der Teilchen-Antiteilchen-Streuung in den Fällen, bei denen zwischen den χ -Spinoren die Eins steht

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda_3}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_1}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_2}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_4} &= e^{i(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_2)\phi} \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_1}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_4} \\ &= e^{i(\lambda_1-\mu)\phi} \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_1}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_4} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (4.4) und (4.5). Bei der Teilchen-Teilchenstreuung (4.46) bekommen wir stattdessen

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda_4}^+ R_{\phi, \theta, -\phi}^T \chi_{\lambda_1}^+ (-\sigma_2) R_{\phi, \theta, -\phi}^* \chi_{\lambda_3} &= (-1)^{\lambda_1+\lambda_2-1} \chi_{\lambda_4}^+ R_{\phi, \theta, -\phi}^T \chi_{\lambda_1}^+ R_{\phi, \theta, -\phi}^* \chi_{\lambda_3} \\ &= (-1)^{\lambda_1+\lambda_2-1} e^{i(\lambda_1-\mu)\phi} \chi_{\lambda_4}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_1}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\phi}{2}} \chi_{\lambda_3}, \end{aligned}$$

so daß vermöge des Faktors σ_1 (d.h. B) auch bei den umgestellten Spinoren der richtige Phasenfaktor herauskommt. Steht jetzt aber $\underline{\sigma}$ zwischen den χ -Spinoren, so werden durch σ_1 und σ_2 die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 umgekehrt, also $\lambda \rightarrow -\lambda$ und der richtige Phasenfaktor $e^{i(\lambda-\mu)}$ ist nur möglich, wenn für $\lambda \neq 0$ die Beiträge der σ_1 - und σ_2 -Matrixelemente verschwinden. Das ist tatsächlich erfüllt:

$$\sum_{i=1}^3 \chi_{\lambda_3}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \sigma_i \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ \sigma_i R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_4} =$$

$$= \chi_{\lambda_3}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{-\lambda_1} \chi_{-\lambda_2}^+ R_{\phi, \theta, -\phi} \chi_{\lambda_4} [1 + (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}]$$

Dies verschwindet nur dann nicht, wenn $\lambda_1 + \lambda_2$ eine ungerade Zahl ist, also ± 1 , d.h. λ_1 muß gleich λ_2 sein ($|\lambda_i| = \frac{1}{2}$, $i=1,2$), und daraus folgt $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Das gleiche Argument wiederholt sich auch in der Teilchen-Teilchenstreuung. Wir haben gezeigt, daß wir den Phasenfaktor $e^{i(\lambda-\mu)}$ vor die Amplitude setzen können, wie es (4.4) entspricht und daß von $R_{\phi, \theta, -\phi}$ zwischen den χ -Spinoren nur mehr $e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}}$ übrig bleibt.

3) Die Matrixelemente der χ -Spinoren

Mit $e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_z \sin \frac{\theta}{2}$ überzeugt man sich leicht, daß folgende Beziehungen gelten.

Teilchen-Antiteilchen-Streuung:

$$\chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_1} = |\lambda_1 + \lambda_3| \cos \frac{\theta}{2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\chi_{\lambda_2}^+ e^{-i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4} = |\lambda_2 + \lambda_4| \cos \frac{\theta}{2} + (\lambda_4 - \lambda_2) \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} = (\lambda_3 + \lambda_1) (\underline{\varepsilon}_z \cos \frac{\theta}{2} + i(\lambda_3 + \lambda_1) \underline{\varepsilon}_y \sin \frac{\theta}{2} + \underline{\varepsilon}_x \sin \frac{\theta}{2})$$

$$- |\lambda_3 - \lambda_1| (\underline{\varepsilon}_z \sin \frac{\theta}{2} + i(\lambda_3 - \lambda_1) \underline{\varepsilon}_y \cos \frac{\theta}{2} - \underline{\varepsilon}_x \cos \frac{\theta}{2})$$

$\underline{\varepsilon}_{x,y,z}$ sind die Einheitsvektoren in x,y,z-Richtung
Teilchen-Teilchen-Streuung:

$$\chi_{\lambda_1}^+ e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \sigma_i \chi_{\lambda_1} = (-i)(-1)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} (|\lambda_1 - \lambda_1| \cos \frac{\theta}{2} - (\lambda_1 + \lambda_1) \sin \frac{\theta}{2})$$

$$\chi_{\lambda_2}^+ \sigma_i^T e^{-i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_2} = (-i)(-1)^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} (|\lambda_2 - \lambda_2| \cos \frac{\theta}{2} - (\lambda_2 + \lambda_2) \sin \frac{\theta}{2})$$

$$\chi_{\lambda_1}^+ e^{i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \sigma_i \sigma \chi_{\lambda_1} = (-i)(-1)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} (|\lambda_1 - \lambda_1| (\underline{\varepsilon}_z \cos \frac{\theta}{2} + i(\lambda_1 - \lambda_1) \underline{\varepsilon}_y \sin \frac{\theta}{2} + \underline{\varepsilon}_x \sin \frac{\theta}{2})$$

$$- |\lambda_1 + \lambda_1| (\underline{\varepsilon}_z \sin \frac{\theta}{2} - i(\lambda_1 + \lambda_1) \underline{\varepsilon}_y \cos \frac{\theta}{2} - \underline{\varepsilon}_x \cos \frac{\theta}{2}))$$

$$\chi_{\lambda_2}^+ \sigma_i^T e^{-i\sigma_z \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_2} = (-i)(-1)^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} (|\lambda_2 - \lambda_2| (\underline{\varepsilon}_z \cos \frac{\theta}{2} - i(\lambda_2 - \lambda_2) \underline{\varepsilon}_y \sin \frac{\theta}{2} + \underline{\varepsilon}_x \sin \frac{\theta}{2})$$

$$- |\lambda_2 + \lambda_2| (\underline{\varepsilon}_z \sin \frac{\theta}{2} + i(\lambda_2 + \lambda_2) \underline{\varepsilon}_y \cos \frac{\theta}{2} - \underline{\varepsilon}_x \cos \frac{\theta}{2}))$$

4) Die vollständigen Spinormatrixelemente

Mit Hilfe der Gln. (4.42) bis (4.44) und der Zerlegung (A) ergibt sich, wenn wir den Phasenfaktor $e^{i(\lambda_1 - \mu_1)\phi}$ unterdrücken:

Teilchen-Antiteilchen-Streuung

$$S: \bar{u}(p_3 \lambda_3) u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) v(p_4 \lambda_4) = \\ = \frac{1}{(2m)^2} (E+m - 4\lambda_1 \lambda_3 (E-m)) (4\lambda_2 \lambda_4 (E-m) - (E+m)) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4}$$

$$P: \bar{u}(p_3 \lambda_3) \gamma_5 u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) \gamma_5 v(p_4 \lambda_4) = \frac{1}{m^2} (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_4) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4}$$

$$V: \bar{u}(p_3 \lambda_3) \gamma^\mu u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) \gamma_\mu v(p_4 \lambda_4) = \\ = \frac{1}{4m^2} (E+m + 4\lambda_1 \lambda_3 (E-m)) (E+m + 4\lambda_2 \lambda_4 (E-m)) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4} \\ + \frac{1}{m^2} (\lambda_1 + \lambda_3) (\lambda_2 + \lambda_4) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \cdot \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4}$$

$$A: \bar{u}(p_3 \lambda_3) \gamma^\mu u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) \gamma_\mu \gamma_5 v(p_4 \lambda_4) = \\ = -\frac{1}{4m^2} (\lambda_1 + \lambda_3) (\lambda_2 + \lambda_4) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4} \\ - \frac{1}{4m^2} (E+m + 4\lambda_1 \lambda_3 (E-m)) (E+m + 4\lambda_2 \lambda_4 (E-m)) \chi_{\lambda_3}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \cdot \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_4}$$

Teilchen-Teilchen-Streuung

$$\hat{S}: v^T(p_4 \lambda_4) B u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) B^T \bar{u}^T(p_3 \lambda_3) = \\ = \frac{1}{m^2} (\lambda_1 - \lambda_4) (\lambda_2 - \lambda_3) \chi_{\lambda_4}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_3}$$

$$\hat{P}: v^T(p_4 \lambda_4) B \gamma_5 u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) \gamma_5 B^T \bar{u}^T(p_3 \lambda_3) = \\ = \frac{1}{4m^2} (E+m - 4\lambda_1 \lambda_4 (E-m)) (E+m - 4\lambda_2 \lambda_3 (E-m)) \chi_{\lambda_4}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_3}$$

$$\hat{V}: v^T(p_4 \lambda_4) B \gamma^\mu u(p_1 \lambda_1) \bar{v}(p_2 \lambda_2) \gamma_\mu B^T \bar{u}^T(p_3 \lambda_3) = \\ = -\frac{1}{m^2} (\lambda_1 + \lambda_4) (\lambda_2 + \lambda_3) \chi_{\lambda_4}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_3} \\ - \frac{1}{4m^2} (E+m + 4\lambda_1 \lambda_4 (E-m)) (E+m + 4\lambda_2 \lambda_3 (E-m)) \chi_{\lambda_4}^+ e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \sigma \chi_{\lambda_1} \cdot \chi_{\lambda_2}^+ \sigma e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} \chi_{\lambda_3}$$

Die Beiträge dieser Matrixelemente zu den Amplituden $A_1, \dots, A_5$ (4.10) erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Helizitäten. Die Ergebnisse finden sich in der folgenden Tabelle, in der wir $z = \cos \theta$ gesetzt haben. Damit sind (4.41) und (4.46) sowie (4.49) berechnet.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
S	$-\frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{E^2}{m^2} \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{E^2}{m^2} \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{E}{m} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}$
P	0	$\frac{p^2}{m^2} \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	0	$\frac{p^2}{m^2} \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	0
V	$2 \frac{p^2}{m^2} + \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$(2 \frac{p^2}{m^2} + 1) \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{E}{m} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}$
A	$-(1 + 2 \frac{p^2}{m^2}) - \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{3+\frac{1}{2}}{2}$	$(2 \frac{p^2}{m^2} + 1) \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{E}{m} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}$
$\hat{S}$	0	$\frac{p^2}{m^2} \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{p^2}{m^2} \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	0	0
$\hat{P}$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{E^2}{m^2} \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{E^2}{m^2} \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{E}{m} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}$
$\hat{V}$	$-(2 \frac{p^2}{m^2} + 1) - \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{3-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{1+\frac{1}{2}}{2}$	$(2 \frac{p^2}{m^2} + 1) \frac{1-\frac{1}{2}}{2}$	$-\frac{E}{m} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}$

Anhang V: Transformation der Wechselwirkung auf Normaldarstellung

Die Koeffizienten c_n in Gl. (2.65) sind zu bestimmen. Statt (2.65) lösen wir, der besseren Übersicht wegen, das äquivalente System

$$(y^\mu y^\nu)_{\alpha\beta} (y^\mu y^\nu)_{\gamma\delta} = \sum_{n=1}^{16} c'_n O_{\alpha\gamma}^{(n)} O_{\beta\delta}^{(n)},$$

bei dem auf der rechten Seite jetzt jeweils die gleichen Diracmatrizen $O^{(n)}$ stehen. Da die Matrizen entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sind, unterscheiden sich die Koeffizienten c_n und c'_n um den Faktor $(-1)^{P+1}$, wo P die Parität der $O^{(n)}$ bei Transposition bedeutet.

Wir wählen nun Indexkombinationen so aus, daß wir sechzehn unabhängige Gleichungen für die c'_n bekommen. Dazu setzen wir z.B. $\alpha=0$ und lassen γ die Werte 0,1,2,3 durchlaufen (β, δ beliebig). Das bedeutet auf der rechten Seite, daß wir die Matrixelemente der ersten $O^{(n)}$ in der ersten Spalte betrachten. Jede Dirac-Matrix (wir legen hier die Bjorken-Drell-Darstellung zugrunde [12]) kann in der ersten Spalte nur in einer Zeile ein nicht verschwindendes Element haben. Damit haben wir eine Klasseneinteilung der sechzehn Matrizen in vier Vierergruppen bekommen und unser Gleichungssystem muß in vier unabhängige Systeme mit je vier Gleichungen zerfallen. Wir nummerieren die Diracmatrizen in der folgenden Anordnung

$$1) \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{ij} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j], \sigma^{[4]} = \sigma^{ij}, (ijkl) \text{ zyklisch}$$

Aus der expliziten Gestalt der Matrizen [12] lesen wir unmittelbar die Gleichungen ab, deren Lösungen leicht zu berechnen sind.

$$\begin{array}{ll} 1) \alpha=0, \gamma=0 & \begin{array}{l} c'_1 + c'_3 + c'_{10} + c'_{16} = -1 \\ c'_1 + c'_3 - c'_{10} + c'_{16} = 0 \\ c'_1 - c'_3 - c'_{10} + c'_{16} = 1 \\ c'_1 - c'_3 + c'_{10} - c'_{16} = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} c'_4 = c'_{16} = 0 \\ c'_3 = c'_{10} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 2) \quad \alpha=0, \gamma=1 & \begin{array}{l} c'_8 - c'_9 + c'_{14} - c'_{15} = 1 \\ c'_8 + c'_9 + c'_{14} + c'_{15} = -2 \\ -c'_8 + c'_9 + c'_{14} - c'_{15} = 1 \\ -c'_8 - c'_9 + c'_{14} + c'_{15} = 0 \end{array} & \begin{array}{l} c'_8 = c'_9 = -\frac{1}{2} \\ c'_{14} = 0 \\ c'_{15} = -1 \end{array} \\
 3) \quad \alpha=0, \gamma=2 & \begin{array}{l} c'_1 + c'_6 + c'_7 + c'_{13} = 1 \\ c'_1 - c'_6 - c'_7 + c'_{13} = -1 \\ c'_1 - c'_6 + c'_7 - c'_{13} = 0 \\ c'_1 + c'_6 - c'_7 - c'_{13} = 0 \end{array} & \begin{array}{l} c'_1 = c'_6 = 0 \\ c'_7 = c'_{13} = \frac{1}{2} \end{array} \\
 4) \quad \alpha=0, \gamma=3 & \begin{array}{l} c'_4 - c'_5 + c'_{11} - c'_{12} = -1 \\ -c'_4 - c'_5 + c'_{11} + c'_{12} = 0 \\ c'_4 + c'_5 + c'_{11} + c'_{12} = 2 \\ -c'_4 + c'_5 + c'_{11} - c'_{12} = -1 \end{array} & \begin{array}{l} c'_4 = c'_5 = \frac{1}{2} \\ c'_{11} = 0 \\ c'_{12} = 1 \end{array}
 \end{array}$$

Um auf die Gestalt (2.66) zu kommen, müssen wir den Vorzeichenfaktor $(-1)^{p+1}$ einsetzen und die Matrizen in der Form $\gamma_{(n)} = B \gamma'_{(n)}$ (siehe gl. (2.60)) $n=1, \dots, 16$ schreiben. Man beachte, daß wegen des Pauliprinzipes nur die sechs antisymmetrischen Matrizen einen Beitrag zur Wechselwirkung geben.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Bopp, Felder und Teilchen, Vorlesung Wintersemester 1967/68, München
- [2] F. Bopp, Z. Physik 200, 117 (1967)
- [3] F. Bopp, Z. Physik 200, 142 (1967)
- [4] W. Heisenberg, Proc. Conf. High Energy Physics, CERN Geneva 1958
- [5] E. G. Weidemann, F. Bopp Z. Physik 204, 311 (1967)
- [6] E. G. Weidemann, Z. Naturforsch. 24a, 499 (1969)
- [7] E. G. Weidemann, G. Friedel, pers. Mitteilung
- [8] F. Bopp, H. Maier-Bötzl, Sitzungsberichte der Bayr. Akad. d. Wissensch., math.-naturwiss. Klasse 8 (1970)
- [9] H.J.W. Müller, Nucl. Phys. B 21, 493 (1970)
Z.Naturforsch. 25a, 1017 (1970)
- [10] H. Maier-Bötzl in Vorbereitung
- [11] S.S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York (1964)
- [12] J. Bjorken, S. Drell, Relativistische Quantenmechanik und Relativistische Quantenfeldtheorie Hochschultaschenbuch Bd 98/98a (1966) und Bd 101/101a (1967) Mannheim
- [13] M. Gell-Mann, F. Low Phys. Rev. 76, 740 (1949)
- [14] F. Wahl, D. Stocker unveröffentlicht
- [15] G. Friedel, Dissertation, München 1971
- [16] D. Iurié, A.J. MacFarlane, Phys Rev. 136, B 816 (1964)
- [17] V.M. Galitskiĭ, A.B. Migdal, JETP 34, 130 (1958)
- [18] R.E. Cutcosky, J. Math. Phys. 1, 429 (1960)
Rev. Mod. Phys. 33, 446 (1961)
- [19] D. Fotiadis, M. Froissart, J. Lascoux, F. Pham, Topology 4, 159 (1965)
- [20] J.J. Sakurai, Currents and Mesons, Chicago 1969

- [21] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Funktionen of Mathematical Physics, Springer 1966
- [22] M. Hamermesh, Group Theory, Addison-Wesley 1962
- [23] M. Jacob, G.C. Wick, Ann. Phys. 7, 404(1959)
- [24] P.D.B. Collins, E.J. Squires, Regge Poles in Particle Physics, Springer Tracts in Modern Physics 45 (1968)
- [25] A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik Hochschultaschenbuch Bd 53/53a Mannheim 1964
- [26] Y. Hara, Phys. Rev. 136, 507 (1964)
- [27] R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne, The Analytic S-Matrix, Cambridge 1966
- [28] M.L. Goldberger, M.T. Grisaru, S.M. MacDowell, D.Y. Wong, Phys. Rev. 120, 2250 (1960)
- [29] W.R. Frazer, Elementary Particles, Prentice-Hall (1966)
- [30] P. Roman, Theory of Elementary Particles, North Holland (1961)
- [31] H. Rosenfeld et al. Particle Properties UCRL - 8030 (1969)
- [32] D.H. Lyth, Mathematics of the N/D-Method, University of Lancaster Preprint 1969
- [33] G. Frye, L.R. Warnock, Phys. Rev. 130, 478 (1963)
- [34] K. Uhde, Spezielle Funktionen der math. Physik Hochschultaschenbuch Bd 55/55a, Mannheim 1964
- [35] Y. Nambu, Proc. Rochester Conf. 858 (1960)
- [36] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1960), 124, 246 (1961)
- [37] T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. 128, 885 (1962)
- [38] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 1425 (1955)
- [39] R.F. Streater, A.S. Wightman, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie, Hochschultaschenbuch Bd 435/435a Mannheim 1969
- [40] M. Fierz, Z. Physik 104, 553 (1937)

- [41] K. Hepp, Theorie de la Renormalisation, Lecture Notes in Physics 2, Springer 1969
- [42] N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience, N. Y. (1959)
- [43] W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Stuttgart 1967

Lebenslauf

Am 20. Februar 1938 wurde ich als Sohn des Juristen Michael Stocker und seiner Ehefrau Herta, geb. Renner zu Kimpolung in den rumänischen Karpaten geboren.

Während des Krieges wurde unsere Familie nach Oberschlesien umgesiedelt und kam schließlich 1945 nach Bayern. In Passau besuchte ich die Volksschule und später die Oberrealschule. 1954 zogen wir nach München und ich trat in die damalige Oberrealschule an der Frühlingsstraße ein, an der ich 1957 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1957/58 begann ich das Studium der Physik, zunächst für ein Semester an der Universität Tübingen und dann an der Universität München. Hier legte ich im Sommer 1960 die Diplom-Vorprüfung ab und im Juni 1967 die Diplom-Hauptprüfung in Physik. Seit Ende 1967 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl von Prof. Dr. F. Bopp.

Ich bin verheiratet und habe einen Sohn.

München, den 6. Dezember 1971

